Основы логики

Краткие теоретические сведения

Логика

Логика (др.-греч.— «наука о рассуждении», «искусство рассуждения) – наука о формах, методах и законах правильного мышления.

Мышлением занимаются и психология, и педагогика, и многие другие науки. По содержанию человеческое мышление бесконечно многообразно, ведь думать можно о чем угодно. Но мысли возникают и строятся по одним и тем же законам, подчиняются одним и тем же принципам, имеют одни и те же схемы или формы. Форм, в которых выражается содержание мышления, немного.

Рассмотрим пример. Высказывания:

- «все ананасы – это фрукты»,
- «все тигры – это хищные животные»,
- «все автомобили – это транспортные средства»

различаются по содержанию, но сходны по форме: «все A – это B», где A и B – это какие-либо предметы. Форму «все A – это B» можно наполнить любым содержанием, например, все учебники – это книги.

Рассмотрим другой пример. Три различных по содержанию высказывания:

- «если наступает весна, то тает снег»,
- «если не готовиться к ЕГЭ, то можно получить двойку»,
- «если стоит сильный туман, то самолеты не могут совершить посадку»

строятся по одной и той же форме: «если A, то B». И к этой форме можно подобрать множество различных содержательных высказываний.

Логика не рассматривает содержанием мышления, она изучает только формы мышления. Логика рассматривает не что мы мыслим, а как мы мыслим, поэтому она также часто называется формальной логикой. Например, если по содержанию высказывание «Все комары – это насекомые» является понятным, осмысленным, а высказывание «Все крокодилы – это птицы» является бессмысленным, то для логики эти два высказывания равноценны: ведь она занимается формами мышления, а форма у этих двух высказываний одна и та же – «Все A – это B».

Таким образом, форма мышления – это способ, которым выражаются мысли, или схема, по которой они строятся. Существует три формы мышления.

Понятие – это форма мышления, которая обозначает какой-либо объект или признак объекта, который отличает его от других объектов (примеры понятий: «собака», «растение», «планета», «химический элемент», «смелость», «трудолюбие» и т.п.).

Высказывание (суждение, утверждение) – это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о свойствах понятий и отношениях между ними, например «Солнце не является планетой»; «Некоторые вещества – это металлы»; «Все цифры – это знаки» «2*2=4» и т.п.). Высказывание может быть истинным или ложным.

Умозаключение – это форма мышления, в которой из двух или нескольких исходных высказываний получают новое высказывание или вывод. Пример умозаключения: Все металлы электропроводны. Железо – это металл. Железо электропроводно.

Помимо форм мышления логика также занимается законами мышления, т.е. такими правилами, соблюдение которых приводит рассуждение к истинным выводам при условии истинности исходных суждений.

Основная цель логики – исследование того, как из одних утверждений можно выводить другие. При этом предполагается, что вывод зависит только от способа связи входящих в него утверждений и их строения, а не от их конкретного содержания. Логика – наука, изучающая методы установления истинности или ложности одних высказываний (утверждений) на основе истинности или ложности других высказываний.

Исторически логика изучалась как часть философии. Сейчас логика также изучается как часть математики, информатики.

Логика появилась примерно в IV в. до н.э. в Древней Греции, ее создателем считается Аристотель. Аристотелевская, или традиционная логика для анализа правильного мышления использует естественный язык, а символическая логика, появившаяся в XIX в., пользуется искусственным языком символов, подобным языку математики.

В конце XIX — начале XX веков были заложены основы математической, или символической, логики. Её суть заключается в том, что для обнаружения истинностного значения выражений естественного языка можно применять математические методы.

Большой вклад в развитие символической логики внесли такие учёные, как Дж. Буль, О. де Морган, Г. Фреге, Ч. Пирс и др. В XX веке математическая логика оформилась в качестве самостоятельной дисциплины.

В середине XX века развитие вычислительной техники привело к появлению логических элементов, и устройств вычислительной техники, решались проблемы синтеза, проектирование и моделирования логических устройств вычислительной техники.

Алгебра логики

Алгебра логики раздел математической логики, изучающий логические высказывания и методы установления их истинности или ложности с помощью алгебраических методов.

Основоположником алгебры логики является английский математик Джордж Буль (1815-1864). Он изучал логику мышления математическими методами и разработал алгебраические методы решения традиционных логических задач. В работе Буля «Исследование законов мышления» была изложена алгебра логики высказываний, основанная на трех операциях And (И), Or (ИЛИ) и Not (НЕ). Эту алгебру называют **булевой алгеброй**. Она позволяет описывать принципы построения и работы логических схем компьютеров, использующих двоичную систему счисления.

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

Например, высказывание «сумма углов треугольника равна 180 градусам» - истинно, а высказывание «Рим – столица Греции» - ложно. Не всякое повествовательное предложение является логическим высказыванием. Определить, истинны или ложны предложения «ученик восьмого класса» и «очень жаркое лето» нельзя. Вопросительные предложения, предложения в повелительной форме также не являются высказываниями.

Истинность или ложность высказывания определяется не алгеброй логики, а конкретными науками, практикой, наблюдениями. Для алгебры логики важен не смысл высказывания, важна лишь его истинность или ложность.

Из заданных высказываний можно строить новые высказывания. Для этого используются слова и словосочетания «и», «или», «не», «либо…, либо», «тогда и только тогда» и др. Такие слова и словосочетания называются **логическими связками**.

Высказывания, образованные из других высказываний, называются **составными (сложными)**. Высказывания, не являющиеся составными, называются **простыми** или **элементарными**. Например, из простых высказываний «Сергей – футболист», «Сергей – пловец» можно получить составное высказывание «Сергей – футболист и пловец». Истинность этого высказывания означает, что Сергей занимается двумя видами спорта. Если высказывание ложно, то Сергей либо не занимается обоими видами спорта, либо не занимается хотя бы одним из них.

Другое составное высказывание «Сергей – футболист или пловец» означает в алгебре логики, что при истинности этого высказывания Сергей или футболист, или пловец, или футболист и пловец одновременно. Если же высказывание ложно, значит, Сергей не занимается ни футболом, ни плаванием.

Алгебра логики позволяет определять истинность или ложность составных высказываний, не вникая в их содержание.

В алгебре логики для формализации работы с высказываниями их обозначают символическими именами, например, А, В, С. Тогда, если обозначить простые высказывания «Денис сделал уроки» именем А, «Денис пошел в кино» именем В, то составное высказывание «Денис сделал уроки и пошел в кино» можно записать как «А и В». Здесь «и» – логическая связка, А, В – **логические переменные**, которые могут принимать логические значения «истина» или «ложь».

Логические значения «истина» и «ложь» могут обозначаться иначе:

истина	ложь
true	false
да	нет
1	0

Истинность или ложность составных высказываний зависит от истинности или ложности простых высказываний.

Пример 1 задания с одним ответом

Для составления цепочек разрешается использовать бусины четырех типов, обозначенные буквами У, М, К, И. Каждая цепочка должна состоять из трех бусин, при этом должны соблюдаться правила:

- любая цепочка заканчивается гласной буквой,

- после согласной буквы не может идти буква У, а после гласной К,

- на первом месте не может быть К или М.

Какая из цепочек построена по этим правилам?

1) МКУ 2) ИКИ 3) УМИ 4) КУУ

Решение:

Здесь правила есть логические высказывания. Требуется определить, какая из цепочек символов удовлетворяет всем высказываниям. Для каждого из ответов проверим истинность высказываний:

Ответы	любая цепочка заканчивается гласной буквой	после согласной буквы не может идти буква У, а после гласной К	на первом месте не может быть К или М
1) МКУ	да	нет	нет
2) ИКИ	да	нет	да
3) УМИ	да	да	да

4) КУУ	да	нет	нет

Все высказывания истинны только для ответа № 3.

Ответ: № 3

Пример 2 задания с одним ответом

При составлении расписания на понедельник учителя высказали свои пожелания по поводу первых пяти уроков. Учитель черчения хочет иметь второй или третий урок, учитель математики – первый или второй урок, учитель информатики – третий или четвертый, учитель географии – третий или четвертый, учитель русского языка согласен только только первый или пятый уроки.

Какой вариант расписания подойдет всем учителям школы? (Обозначения: Ч – черчение, М – математика, И – информатика, Г – география, Р – русский язык.)

1) Ч М И Г Р 2) М Ч И Г Р 3) Р Ч М Г И 4) М Р Ч И Г

Решение:

Требуется выяснить, для какого из вариантов ответов все высказывания учителей истинны. Внесем их в таблицу,.

Номер урока	1	2	3	4	5
Предмет	М, Р	Ч, М	Ч, И, Г	И, Г	Р

Проверим истинность высказываний для каждого ответа.

Ответы:	1: М, Р	2: Ч, М	3: Ч, И, Г	4: И, Г	5: Р
1) ЧМИГР	нет	да	да	да	да
2) МЧИГР	да	да	да	да	да
3) РЧМГИ	да	да	нет	да	нет
4) МРЧИГ	да	нет	да	да	нет

Все высказывания истинны только для ответа № 2

Ответ: № 2

Логические операции

В алгебре логики логические связки рассматриваются как логические операции, имеющие название и обозначение.

В таблице 1 приведены логические операции и их обозначения, используемые как в алгебре логики, так и при записи алгоритмов и программ на некоторых языках программирования. Жирным шрифтом выделены обозначения операций, используемые в заданиях ЕГЭ.

Таблица 1

№	Операция	Обозначение	Соответствующие речевые обороты
1	Отрицание (инверсия, логическое НЕ)	$\neg A$ $\overline{A}$ **не *A*** not *A*	Не *A* Неверно, что *A*
2	Конъюнкция (логическое умножение, логическое И)	$A \wedge B$ $A \& B$ $A \cdot B$ ***A* и *B*** *A* and *B*	*A* и *B* как *A*, так и *B* *A* вместе с *B*
3	Дизъюнкция (логическое сложение, логическое ИЛИ, включающее ИЛИ)	$A \vee B$ $A + B$ ***A* или *B*** *A* or *B*	*A* или *B* *A* или *B* или оба вместе
4	Исключающая дизъюнкция (исключающее ИЛИ, сложение по модулю 2, строгая дизъюнкция)	$A \oplus B$ *A* xor *B*	Либо *A*, либо *B* *A* или *B*, но не оба вместе Только *A* или только *B*
5	Импликация (следование)	$A \rightarrow B$ $A \Rightarrow B$ *A* – посылка *B* – следствие	Если *A*, то *B* Из *A* следует *B* *A* влечет *B* для *A* необходимо *B* для *B* достаточно *A* *A* только тогда, когда *B* *B* тогда, когда *A* все *A* есть *B*
6	Эквиваленция (равнозначность)	$A \leftrightarrow B$, $A \equiv B$, $A \sim B$	*A* эквивалентно *B* *A* равносильно *B* *A* необходимо и достаточно для *B* *A* тогда и только тогда, когда *B* либо *A* и *B*, либо ни *A* ни *B*

Операция **отрицания** выполняется над одним операндом. Такие операции называются **одноместными** или **унарными**. Правило выполнения этой операции: если значение логического операнда *A* истинно, то значение $\neg A$ ложно, если *A* ложно, то $\neg A$ истинно. Если высказывание «Денис сделал уроки» обозначить переменной *A*, то $\neg A$ соответствует высказыванию «Денис не сделал уроки» или «Неверно, что Денис сделал уроки».

Все остальные логические операции, перечисленные в таблице 1, выполняются над двумя операндами и называются **двуместными** или **бинарными**.

При выполнении операции **конъюнкции** результатом будет истина только в том случае, когда оба операнда истинны. Во всех остальных случаях результатом выполнения конъюнкции будет ложь. Например, высказывание А «число 7 простое» истинно, высказывание В «число 10 четное» истинно. Высказывание «число 7 простое и число 10 четное» истинно. Высказывания «число 7 не простое и число 10 четное», «число 7 простое и число 10 нечетное», «число 7 не простое и число 10 нечетное» ложны.

Результатом выполнения операции **дизъюнкции** будет ложь только в том случае, когда оба операнда ложны. Для получения истины хотя бы один операнд должен быть истинным. Например, три составных высказывания «число 7 простое или число 10 четное», «число 7 не простое или число 10 четное», «число 7 простое или число 10 нечетное» истинны, высказывание «число 7 не простое или число 10 нечетное» ложно.

Если операнды имеют разные логические значения, результатом операции **исключающей дизъюнкции (исключающего или)** будет истина, а результатом операции **эквиваленции** – ложь. Если оба простых высказывания ложны, или оба простых высказывания истинны, результатом операции **исключающей дизъюнкции** будет ложь, а операции **эквиваленции** – истина. Можно сделать вывод, что операция **эквиваленции** есть отрицание операции **исключающей дизъюнкции**, и наоборот: операция **исключающей дизъюнкции** есть отрицание операции **эквиваленция**.

В операции **импликации** $A \to B$ операнд A называют **посылкой**, операнд B – **следствием** или **заключением**. Импликация ложна лишь тогда, когда посылка истинна, а следствие ложно. Во всех остальных случаях импликация истинна.

Тот факт, что когда A ложно, импликация $A \to B$ истинна при любом B, соответствует принципу "ex falso quod libet" – из ложного (высказывания) - все что угодно (лат.).

Составим таблицу, иллюстрирующую правило выполнения операции импликации для высказываний A «идет дождь», B «на небе тучи».

Пример составного высказывания «Если…, то…»

A «идет дождь»	B «на небе тучи»	Составное высказывание	$A \to B$
ложь	ложь	«Если не идет дождь, то на небе нет туч»	истина
ложь	истина	«Если не идет дождь, то на небе тучи»	истина
истина	ложь	«Если идет дождь, то на небе нет туч»	ложь
истина	истина	«Если идет дождь, то на небе тучи»	истина

Из всех логических операций импликация вызывает больше всего вопросов. В разговорной речи связка «если…, то…» описывает причинно-следственную связь между высказываниями. Напомним, что в алгебре логики смысл высказываний не учитывается, рассматривается только их истинность или ложность. Высказывания A и B могут быть даже не связанными по содержанию, например, «если в огороде бузина, то в Киеве дядька». Надо понимать, что результат операции импликации, как и других логических операций, определяется истинностью или ложностью переменных, а не наличием причинно-следственных связей между высказываниями. Приведенный в таблице пример лишь помогает понять и запомнить правило выполнения импликации.

О формах записи логических операций

Приведем варианты записи логических операций на примере одного выражения:

1) не *A* и *B* или *A* и не *B*
2) $\neg A \wedge B \vee A \wedge \neg B$
3) $\neg A$ & $B \vee A$ & $\neg B$
4) $\overline{A}\,B \vee A\,\overline{B}$

Это далеко не все варианты записей. Первый вариант используется в заданиях ЕГЭ и ГИА, второй – в заданиях ЕГЭ, третий – в заданиях ГИА. Варианты 2 и 3 удобны для обозначения последовательности выполнения логических операций. Вместе с тем второй вариант записи не удобен при проведении преобразований сложных логических выражений, в то время как четвертый вариант имеет более простую и наглядную форму. Мы будем использовать второй и четвертый варианты обозначений.

Таблицы истинности

Для задания логических операций используются **таблицы истинности**. В таблицах истинности перечисляются все возможные комбинации значений логических переменных (операндов) и результаты выполнения соответствующих логических операций. Как правило, используются обозначения логических значений 0 (ложь) и 1 (истина).

Таблицы истинности могут быть записаны так же, как таблицы умножения (рис. 1).

Отрицание

A	¬A
0	1
1	0

конъюнкция

B A	0	1
0	0	0
1	0	1

дизъюнкция

B A	0	1
0	0	1
1	1	1

исключающая дизъюнкция

B A	0	1
0	0	1
	1	0

импликация A→B

B A	0	1
0	1	1
1	0	1

эквиваленция

B A	0	1
0	1	0
1	0	1

Рис. 1. Таблицы истинности логических операций

В первой строке каждой таблицы записаны значения логической переменной *B*, в первом столбце – значения логической переменной *A*. На пересечении строки и столбца – результат выполнения логической операции при соответствующих значениях *A* и *B*.

Другой вид таблиц истинности показан ниже (табл. 2). Наборы значений аргументов и соответствующие им значения функций записаны в строках сводной таблицы истинности.

Таблица 2. Сводная таблица истинности логических операций

Логические переменные		Логические операции					
		отрицание	конъюнкция	дизъюнкция	исключающая дизъюнкция	импликация	эквиваленция
A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
0	**0**	1	0	0	0	1	1
0	**1**	1	0	1	1	1	0
1	**0**	0	0	1	1	0	0
1	**1**	0	1	1	0	1	1

Совокупность значений переменных называют **набором**, например, A=0, B=1 образуют набор 01. Номера наборов всегда нумеруются, начиная с нуля, каждый набор представляет собой двоичный код числа, равный номеру соответствующего набора.

Если количество переменных N, то количество различных наборов 2^N. Для двух переменных количество различных наборов $2^2 = 4$ (00, 01, 10, 11). Для всех четырех наборов логических переменных A и B в столбцах таблицы 2 записаны результаты применения к ним соответствующих логических операций.

Логическая функция может быть задана таблицей истинности. Логическая функция - это функция логических переменных $X_1, X_2, X_3, ..., X_N$

$$F = F(X_1, X_2, X_3, ..., X_N),$$

которая может принимать только два значения: истина (1) или ложь (0).

Область определения функции - это количество возможных наборов значений аргументов (или количество строк в таблице истинности). Оно равно $S = 2^N$, где N - количество переменных.

Для каждого набора логическая функция может принимать только два значения, поэтому количество различных функций N переменных ограничено и равно 2^S. Приведем пример различных функций при N=2. В этом случае $S = 2^2$=4, а количество разных функций равно 2^4=16.

Переменные		Функции															
A	B	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Некоторые из этих функций соответствуют известным логическим операциям, например, F_1 – конъюнкция, F_7 – дизъюнкция. Функции F_0=0 и F_{15}=1 – константы, изменения значений аргументов не влияют на значения этих функций. F_3 и F_{12} – переменная A и ее инверсия, F_5 и F_{10} – переменная B и ее инверсия. F_8 – отрицание дизъюнкции, она называется стрелка Пирса, или функция Вебба. F_{14} – отрицание конъюнкции, называется штрих Шеффера.

Логические выражения

Составное логическое высказывание можно представить в виде логического выражения (формулы), состоящего из логических констант «истина» или «ложь», логических переменных (операндов), знаков логических операций и скобок. Логические выражения принимают значения «истина» или «ложь».

Логическое выражение строится по правилам:

1) всякая логическая переменная, а также логические константы «истина» и «ложь» есть выражение;
2) если A – выражение, то $\neg A$ – выражение;
3) если A и B – выражения, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \oplus B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ – выражения.

В соответствии с этими правилами $\neg A \wedge B \vee A \wedge \neg B$ – это выражение, $\neg A \wedge \vee B$ – не выражение.

В логических выражениях операции выполняются в соответствии с их приоритетами:

1. отрицание;
2. конъюнкция;
3. дизъюнкция, исключающая дизъюнкция (исключающее ИЛИ);
4. импликация, эквиваленция.

Самый высокий приоритет имеет операция отрицания, она выполняются в первую очередь. Далее, как и в арифметике, логическое умножение, затем логическое сложение. Операции одного приоритета выполняются слева направо. Скобки меняют порядок выполнения операций. Например, при вычислении двух выражений последовательность выполнения операций будет следующей

$$\overset{1}{\neg} A \overset{3}{\wedge} B \overset{5}{\vee} A \overset{4}{\wedge} \overset{2}{\neg} B \qquad\qquad \overset{2}{\neg} A \overset{4}{\wedge} (B \overset{1}{\vee} A) \overset{5}{\wedge} \overset{3}{\neg} B$$

Если A=1, B=0 то результат вычисления первого выражения будет равен 1 (истина), второго – 0 (ложь).

Операции импликации, исключающего ИЛИ, эквиваленции можно выразить через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию по формулам:

$A \rightarrow B = \neg A \vee B$
$A \oplus B = \neg A \wedge B \vee A \wedge \neg B$
$A \leftrightarrow B = A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B$
$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

Логические выражения, у которых для всех наборов входящих в них переменных значения в таблицах истинности совпадают, называются **равносильными** или **эквивалентными**. Равносильность выражений обозначается знаком равенства «=».

Логические выражения, принимающие значение "истина" при любых значениях входящих в них переменных называются **тождественно-истинными** выражениями или **тавтологиями**. Пример: $A \vee \neg A$.

Логические выражения, принимающие значение "ложь" при любых значениях входящих в них переменных, называются **тождественно-ложными** выражениями или **противоречиями**. Пример: $A \wedge \neg A$.

Построение таблиц истинности

Убедиться в равносильности двух выражений можно, построив для них таблицы истинности. Количество строк в таблице будет равно числу наборов 2^N, где N – количество логических переменных, входящих в выражения.

Для проверки равносильности выражений $A \to B$ и $\neg A \vee B$ построим таблицу истинности выражения $\neg A \vee B$. Операции будем выполнять в соответствии с их приоритетами: первой выполняется операция отрицания, второй – дизъюнкции. В таблице количество строк равно четырем. Количество столбцов определяется количеством логических переменных и логических операций в выражении.

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\neg A}$	$\boldsymbol{\neg A \vee B}$	$\boldsymbol{A \to B}$
0	0	1	**1**	**1**
0	1	1	**1**	**1**
1	0	0	**0**	**0**
1	1	0	**1**	**1**

Результат в четвертом столбце получен дизъюнкцией значений третьего и второго столбцов. Он совпадает с таблицей истинности операции импликации, записанной в последнем столбце.

Для построения таблицы истинности логического выражения необходимо:

1) определить количество строк таблицы по формуле 2^N, где N – количество используемых логических переменных;
2) определить количество столбцов таблицы как сумму количества логических переменных и операций или промежуточных формул;
3) определить порядок выполнения операций в исходной формуле с учетом приоритетов и скобок;

4) найти значения промежуточных формул и конечного результата в соответствии с таблицами истинности.

Построим таблицу истинности для выражения $\neg A \wedge B \vee A \wedge \neg B$, чтобы убедиться в том, что оно равносильно строгой дизъюнкции (исключающему или) $A \oplus B$.

Набор	Переменные		Промежуточные логические выражения				Результат	
0	1	2	3	4	5	6	7	
	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{\neg A}$	$\boldsymbol{\neg B}$	$\boldsymbol{\neg A \wedge B}$	$\boldsymbol{A \wedge \neg B}$	$\boldsymbol{\neg A \wedge B \vee A \wedge \neg B}$	$\boldsymbol{A \oplus B}$
0	0	0	1	1	0	0	**0**	**0**
1	0	1	1	0	1	0	**1**	**1**
2	1	0	0	1	0	1	**1**	**1**
3	1	1	0	0	0	0	**0**	**0**

В первую очередь выполняются операции отрицания (столбцы 3 и 4). Затем конъюнкция (логическое умножение) столбцов 3 и 2, столбцов 1 и 4. Результат в столбце 7 получен дизъюнкцией (логическим сложением) значений пятого и шестого столбцов, он совпадает с таблицей истинности операции исключающего или (последний столбец).

Пример 3 задания с выбором одного ответа

Для какого из указанных значений числа X истинно выражение

$(X * 2 > 10) \wedge \neg(X + 3 < 8) \vee \neg(X > 0)$?

1) 0 2) 2 3) 4 4) 7

Решение: Преобразуем неравенства так, чтобы слева оставалась только переменная X. Получим $(X > 5) \wedge \neg(X < 5) \vee \neg(X > 0)$. Далее выполним операции отрицания, получим $(X > 5) \wedge (X >= 5) \vee (X <= 0)$. Затем выполняется операция конъюнкции $(X > 5) \wedge (X >= 5)$, результатом выполнения которой будет истина только в том случае, если оба неравенства будут выполняться. Это возможно только при $X > 5$. Наконец, последней выполняется операция дизъюнкции. Для получения истины необходимо, чтобы хотя бы один из операндов был истинным: $X > 5$ или $X <= 0$. В предложенных ответах все числа положительные, но только 7 > 5, значит, ответ $X = 7$.

Эту задачу можно решить составлением таблицы истинности. Введем логические переменные A, B и C: A = (X*2 > 10), B = (X + 3 < 8), C = (X > 0). Тогда выражение можно записать в виде $A \wedge \neg B \vee \neg C$. Порядок выполнения операций: отрицание B, отрицание C, логическое умножение, логическое сложение.

X	A ($X > 5$)	B ($X < 5$)	C ($X > 0$)	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$\neg C$	$A \wedge \neg B \vee \neg C$

0	0	1	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0
4	0	1	1	0	0	0	0
7	1	0	1	1	1	0	1

***Ответ*: № 4**

Пример 4 задания с кратким ответом

Наименьшее целое значение числа X, при котором истинно выражение

$(256 <= X \cdot X) \rightarrow (256 >= (X + 1) \cdot (X + 1))$

равно ___________

Решение: Преобразуем выражение, используя формулу A→B = ¬A ∨ B. Отрицанием высказывания $(256 < = X \cdot X)$ является $(256 > X \cdot X)$. Получим выражение

$(256 > X \cdot X) \vee (256 >= (X + 1) \cdot (X + 1))$

Для того чтобы выражение было истинным, должны выполняться хотя бы одно неравенство. Первое неравенство выполняется при $-16 < X < 16$, второе неравенство – при $-17 <= X <= 15$.

***Ответ*: –17.**

Пример 5 задания с выбором ответа

Какое из приведенных названий животных удовлетворяет логическому условию

¬(есть мягкий знак ∧ (вторая буква гласная → пятая буква согласная))

1) МЕДВЕДЬ 2) ВЫХУХОЛЬ 3) МУРАВЬЕД 4) ОБЕЗЬЯНА

***Решение*:**

Введем обозначения логических высказываний

А – есть мягкий знак (не А – нет мягкого знака)

В – вторая буква гласная (не В – вторая буква согласная)

С - пятая буква согласная (не С – пятая буква гласная)

Запишем условие с использованием обозначений и построим таблицу истинности для каждого варианта ответа с учетом правил очередности выполнения операций.

¬(A ∧ (B → C))

Ответ	A	B	C	B → C	A ∧ (B → C)	¬(A ∧ (B → C))
МЕДВЕДЬ	1	1	0	0	0	1
ВЫХУХОЛЬ	1	1	1	1	1	0
МУРАВЬЕД	1	1	1	1	1	0
ОБЕЗЬЯНА	1	0	0	1	1	0

Ответ № 1.

Основные законы алгебры логики

Способ определения истинности сложного выражения путем построения таблиц истинности становится громоздким при увеличении количества логических переменных, так как количество наборов резко увеличивается. В таких случаях используют способы упрощения формул путем использования равносильных преобразований. В таблице 3 приведены основные законы алгебры логики[1].

Таблица 3

Основные законы алгебры логики

Законы	Дизъюнкция	Конъюнкция
коммутативности (переместительный)	$A \vee B = B \vee A$	$A \wedge B = B \wedge A$
ассоциативности (сочетательный)	$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$
дистрибутивности (распределительный)	$A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C$	$A \vee B \wedge C = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
де Моргана	$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
идемпотентности (тавтологии)	$A \vee A = A$	$A \wedge A = A$
Поглощения	$A \vee A \wedge B = A$	$A \wedge (A \vee B) = A$
Порецкого (правило свертки)	$A \vee \neg A \wedge B = A \vee B$	$A \wedge (\neg A \vee B) = A \wedge B$
склеивания	$A \wedge B \vee \neg A \wedge B = B$	$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) = B$
исключенного третьего	$A \vee \neg A = 1$	
непротиворечия		$A \wedge \neg A = 0$
исключения констант	$A \vee 0 = A$ $A \vee 1 = 1$	$A \wedge 1 = A$ $A \wedge 0 = 0$
двойного отрицания	$\neg(\neg A) = A$	

Справедливость законов можно доказать построением таблиц истинности.

В алгебре логики выполняется **принцип двойственности**: если конъюнкцию заменить дизъюнкцией, дизъюнкцию заменить конъюнкцией, 0 заменить на 1, а 1 на 0, то равносильность, записанная для дизъюнкции, перейдет в равносильность, записанную для конъюнкции.

[1] Рекомендуем переписать эту таблицу для других обозначений логических операций.

Применение законов алгебры логики, похожих на законы преобразований в обычной алгебре, не вызывают затруднений. Рассмотрим примеры применения законов склеивания, поглощения, идемпотентности, де Моргана, не имеющих аналогов в обычной алгебре.

Законы склеивания $A \wedge B \vee \neg A \wedge B = B$ и $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) = B$.

1) В выражении $X \wedge Y \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \wedge Z$ переменной A соответствует переменная X, переменной B соответствует выражение $Y \wedge Z$. Тогда в результате упрощения получим

$$X \wedge Y \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \wedge Z = Y \wedge Z.$$

2) В выражении $(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z)$ переменной A соответствует переменная Y, переменной B соответствует выражение $X \vee Z$. Получим

$$(X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z) = X \vee Z.$$

Законы идемпотентности и склеивания

3) Упростить выражение $X \wedge Y \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge \neg Y \wedge Z \vee X \wedge Y \wedge \neg Z$. В этом примере, на первый взгляд, закон склеивания можно использовать только один раз – для первого слагаемого и одного из трех других:

$X \wedge Y \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge \neg Y \wedge Z \vee X \wedge Y \wedge \neg Z =$

$= Y \wedge Z \vee X \wedge \neg Y \wedge Z \vee X \wedge Y \wedge \neg Z =$

$= X \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge Y \wedge \neg Z =$

$= X \wedge Y \vee \neg X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge \neg Y \wedge Z.$

Но если использовать закон идемпотентности $A = A \vee A$, можно в исходную формулу добавить еще два слагаемых, совпадающих с первым. Получим

$(X \wedge Y \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z \vee X \wedge Y \wedge \neg Z) =$

$Y \wedge Z \vee X \wedge Z \vee X \wedge Y.$

Законы поглощения и закон Порецкого

4) Упростить выражение $X \vee X \wedge Y \vee X \wedge Z \vee X \wedge Y \wedge Z$. Для всех слагаемых общим сомножителем является X. Последовательно применяя закон поглощения $A \vee A \wedge B = A$, получим

$X \vee X \wedge Y \vee X \wedge Z \vee X \wedge Y \wedge Z =$

$X \vee X \wedge Z \vee X \wedge Y \wedge Z =$

$X \vee X \wedge Y \wedge Z = X.$

При решении заданий на экзамене удобно вычеркивать поглощаемые операнды:

$$X \vee \cancel{X \wedge Y} \vee \cancel{X \wedge Z} \vee \cancel{X \wedge Y \wedge Z} = X$$

5) Упростить выражение $X \vee \neg X \wedge Y \vee \neg X \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \wedge Z$. Последовательно применим закон Порецкого $A \vee \neg A \wedge B = A \vee B$, получим

$X \vee \neg X \wedge Y \vee \neg X \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \wedge Z =$

$= X \vee Y \vee \neg X \wedge Z \vee \neg X \wedge Y \wedge Z =$

$= X \vee Y \vee Z \vee \cancel{\neg X \wedge Y \wedge Z} =$

$= X \vee Y \vee Z$

В предпоследней строке к выражению $Z \vee \neg X \wedge Y \wedge Z$ был применен закон поглощения $A \vee A \wedge B = A$.

6) Упростить выражение $(X \vee Y) \wedge (X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z)$. Для всех сомножителей общим слагаемым является $X \vee Y$, это есть результат упрощения.

Законы де Моргана $\neg(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) = \neg\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}$ и $\neg(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) = \neg\mathrm{A} \vee \neg\mathrm{B}$. Применим последовательно закон де Моргана, поглощения и идемпотентности.

7) Упростить выражение $\neg(X \vee Y) \vee \neg(X \wedge Z) \vee \neg(X \wedge Y \wedge Z)$.

$\neg(X \vee Y) \vee \neg(X \wedge Z) \vee \neg(X \wedge Y \wedge Z) =$

$\cancel{\neg X \wedge \neg Y} \vee \neg X \vee \neg Z \vee \cancel{\neg X} \vee \neg Y \vee \cancel{\neg Z} =$

$\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$

Пример 6 задания с одним верным ответом

Из перечисленных выражений

1) $A \vee B \wedge (C \vee \neg A \vee A \wedge C) \wedge \neg B$

2) $A \wedge B \wedge (C \vee \neg A \vee A \wedge C) \vee \neg B$

3) $A \wedge B \vee (C \vee \neg A \vee A \wedge C) \wedge \neg B$

4) $A \wedge B \wedge (C \vee \neg A \vee A \wedge C) \wedge \neg B$

тождественно ложным является выражение

Решение: выполним преобразования выражений. Выделим шрифтом фрагменты, к которым применяются законы алгебры логики.

1) $A \vee B \wedge (C \vee \neg A \vee A \wedge C) \wedge \neg B =$

$A \vee \boldsymbol{B \wedge \neg B} \wedge (C \vee \neg A \vee A \wedge C) =$

$A \vee 0 = A$. Формула не тождественно ложная.

2) $A \wedge B \wedge (\boldsymbol{C \vee} \neg A \vee \boldsymbol{A \wedge C}) \vee \neg B =$

$A \wedge \boldsymbol{B} \wedge (C \vee \neg A) \vee \boldsymbol{\neg B =}$

$\boldsymbol{A \wedge (C \vee \neg A)} \vee \neg B =$

$A \wedge C \vee \neg B$. Формула не тождественно ложная.

3) $A \wedge B \vee (\boldsymbol{C} \vee \neg A \boldsymbol{\vee A \wedge C}) \wedge \neg B =$

$A \wedge B \vee (C \vee \neg A) \wedge \neg B =$

$A \wedge B \vee \neg B \wedge C \vee \neg A \wedge \neg B.$ Формула не тождественно ложная.

4) $A \wedge \boldsymbol{B} \wedge (C \vee \ \vee A \wedge C) \boldsymbol{\wedge \neg B} =$

$A \wedge \boldsymbol{B \wedge \neg B} \wedge (C \vee \neg A \vee A \wedge C) =$

$A \boldsymbol{\wedge 0 \wedge} (C \vee \neg A \vee A \wedge C) = 0.$ Формула тождественно ложная.

Ответ: № 4

Пример 7 задания с одним верным ответом

Какое из приведенных имен удовлетворяет логическому условию

¬(первая буква гласная → последняя буква гласная) ∧ вторая буква согласная

1) ИРИНА 2) ОЛЕГ 3) СТЕПАН 4) ИЛОНА

Решение. Подобную задачу мы рассмотрели выше, где решали ее построением таблицы истинности. В этом примере введем обозначения и выполним преобразования логического выражения.

А – первая буква гласная

В – последняя буква гласная

С – вторая буква согласная

$\neg(A \rightarrow B) \wedge C = \neg(\neg A \vee B) \wedge C = A \wedge \neg B \wedge C$

Полученное выражение означает, что все три сомножителя одновременно должны быть истиной. Возвращаясь к высказываниям, получим, что в слове

первая буква гласная и последняя буква согласная и вторая буква согласная.

Этому условию удовлетворяет имя ОЛЕГ.

Ответ № 2

Пример 8 задания с одним верным ответом

При составлении расписания на субботу учителя высказали свои пожелания по поводу первых пяти уроков. Учитель химии хочет иметь второй или третий урок, учитель литературы – первый или второй урок, учитель информатики – первый или четвертый, учитель технологии – третий или четвертый, учителя английского языка устраивают только четвертый или пятый уроки.

Какой вариант расписания подойдет всем учителям школы?

(Обозначения: Х – химия, Л – литература, И – информатика, Т – технология, А – английский язык.)

1) И Л Т Х А 2) Л Х Т И А 3) Л Х И Т А 4) И Х Т Л А

Решение. В пожелании каждого учителя используется логическая связка ИЛИ, что означает, что учителя устроит любой из вариантов. Проверим выполнение высказываний для всех вариантов ответа. Выполнение высказывания обозначим И, не выполнение – Л.

Так как все пожелания должны выполняться одновременно, при появлении в столбце значения Л остальные высказывания в этом столбце можно не проверять.

Высказывания	И Л Т Х А	Л Х Т И А	Л Х И Т А	И Х Т Л А
второй или третий урок химии	Л	И	И	И
первый или второй урок литературы		И	И	Л
первый или четвертый урок информатики		И	Л	
третий или четвертый урок технологии		И		
четвертый или пятый урок английского языка		И		

Ответ: № 2

Нормальные формы логических функций

Одна и та же логическая функция может быть задана разными выражениями (формулами), иногда довольно сложными. Для сравнения выражений их следует упростить. Под упрощением выражений понимают равносильные преобразования, приводящие к нормальной форме.

Логическое выражение имеет **нормальную форму**, если в нем используются только три логические операции: дизъюнкции, конъюнкции и отрицания переменных. При этом не используется двойное отрицание и отрицание выражений.

Введем определения.

Элементарная конъюнкция – логическое произведение аргументов или их отрицаний. Например, $A \wedge \neg B \wedge C$ – элементарная конъюнкция, а $\neg(A \wedge \neg B)$ – нет, т.к. присутствует отрицание выражения.

Элементарная дизъюнкция – логическая сумма аргументов или их отрицаний, например, $A \vee \neg B \vee C$ – элементарная дизъюнкция, а $\neg(A \vee \neg B)$ – нет, т.к. присутствует отрицание выражения. Выражение $A \vee \neg B \wedge C$ также не является элементарной дизъюнкцией, т.к. в него входит конъюнкция.

Если каждый аргумент входит в элементарную конъюнкцию (дизъюнкцию) не более одного раза, она называется **правильной элементарной конъюнкцией** (дизъюнкцией).

ДНФ и КНФ

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) – это дизъюнкция попарно различных правильных элементарных конъюнкций (логическая сумма логических произведений), например: $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z)$.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) – это конъюнкция попарно различных правильных элементарных дизъюнкций (логическое произведение логических сумм), например: $(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z)$.

Любая логическая функция приводится к ДНФ или КНФ с помощью следующего алгоритма:

1) избавляются от импликации, эвиваленции, исключающего или;
2) избавляются от отрицаний над сложными высказываниями, используя закон де Моргана и закон двойного отрицания;
3) раскрывают скобки, применяя дистрибутивные (распределительные) законы логики.
4) уменьшают количество вхождений переменных, используя законы алгебры логики.

Пример 9 задания с выбором одного ответа

Укажите, какое логическое выражение равносильно выражению $\neg(A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

1) $\neg A \vee B \vee C$ 2) $\neg A \vee B \vee \neg C$ 3) $\neg A \wedge B \wedge C$ 4) $A \wedge B \wedge \neg C$

Решение: все предложенные варианты ответов представляют собой нормальные формы логических выражений. Приведем исходное выражение к нормальной форме, используя закон де Моргана, получим $\neg A \vee B \vee C$.

Ответ: № 1

Пример 10 задания с выбором одного ответа

Логическое выражение $\neg(A \wedge (B \vee \neg C) \vee \neg A \wedge B)$ равносильно выражению

1) 1

2) $\neg A \wedge \neg B \vee \neg B \wedge C$

3) $\neg A \vee \neg B \wedge C$

4) $\neg A \wedge C \vee \neg B$

Решение: все предложенные варианты ответов представлены в нормальной форме. Приведем исходное выражение к нормальной форме, используя законы де Моргана, двойного отрицания и поглощения.

$\neg(A \wedge (B \vee \neg C) \vee \neg A \wedge B) =$

$\neg(A \wedge (B \vee \neg C)) \wedge \neg(\neg A \wedge B) =$

$(\neg A \vee \neg(B \vee \neg C)) \wedge (A \vee \neg B) =$

$(\neg A \vee \neg B \wedge C) \wedge (A \vee \neg B) =$

$\cancel{\neg A \wedge A} \vee \neg A \wedge \neg B \vee \cancel{A \wedge \neg B \wedge C} \vee \neg B \wedge C =$

$\neg A \wedge \neg B \vee \neg B \wedge C$

Запишем эти же преобразования, используя другие обозначения логических операций:

$$\overline{A(B \vee \overline{C}) \vee \overline{A}B} = \overline{A(B \vee \overline{C})}\,\overline{(\overline{A}B)} = (\overline{A} \vee \overline{B}C)(A \vee \overline{B}) = 0 \vee \overline{A}\,\overline{B} \vee A\overline{B}C \vee \overline{B}C = \overline{A}\,\overline{B} \vee \overline{B}C$$

При решении заданий можно использовать любую форму записи. Определите, какая форма более наглядна и удобна для Вас.

Ответ № 2.

Пример 11 задания с выбором одного ответа

Логическое выражение $\neg((J \to K) \to (M \wedge N \wedge L))$ равносильно выражению

1) $(\neg J \vee K) \wedge (\neg M \wedge \neg N \wedge \neg L)$

2) $(J \wedge \neg K) \vee (\neg M \wedge \neg N \wedge \neg L)$

3) $\neg J \vee K \vee \neg M \vee \neg N \vee \neg L$

4) $(\neg J \vee K) \wedge (\neg M \vee \neg N \vee \neg L)$

Решение: все предложенные варианты ответов представлены в нормальных формах. Приведем исходное выражение к нормальной форме, избавляясь от импликации, используя законы де Моргана и двойного отрицания.

$\neg((J \to K) \to (M \wedge N \wedge L)) =$

$\neg((\neg J \vee K) \to (M \wedge N \wedge L)) =$

$\neg(\neg(\neg J \vee K) \vee (M \wedge N \wedge L)) =$

$\neg\neg(\neg J \vee K) \wedge \neg(M \wedge N \wedge L) =$

$(\neg J \vee K) \wedge (\neg M \vee \neg N \vee \neg L)$

Ответ: № 4

Пример 12.

Определить ДНФ выражения $\neg(A \to B) \vee \neg(A \vee B)$

Решение: Запишем решение, используя другие обозначения операций

$\overline{(A \to B)} \vee \overline{A \vee B} =$

$\overline{\overline{A} \vee B} \vee \overline{A}\,\overline{B} =$

$A\overline{B} \vee \overline{A}\,\overline{B} =$

$\overline{B}(A + \overline{A}) = \overline{B}$

Ответ: $\neg B$

Пример 13.

Определить ДНФ выражения

$((J \to K) \to (M \wedge N \wedge L)) \wedge ((J \wedge \neg K) \to \neg(M \wedge N \wedge L)) \wedge (M \to J)$

Решение: Выполним преобразования по шагам. Будем выделять шрифтом те элементы логического выражения, к которым применены законы алгебры логики. Обратите внимание, что переменные в элементарных конъюнкциях удобно записывать в алфавитном порядке. При этом проще, например, находить одинаковые конъюнкции (слагаемые).

1) Избавимся от импликации.

$((\mathbf{\neg J \vee K}) \to (M \wedge N \wedge L)) \wedge ((J \wedge \neg K) \to \neg(M \wedge N \wedge L)) \wedge (\mathbf{\neg M \vee J}) =$

$(\mathbf{\neg(\neg J \vee K) \vee (L \wedge M \wedge N)}) \wedge (\mathbf{\neg(J \wedge \neg K) \vee \neg(L \wedge M \wedge N)}) \wedge (\neg M \vee J).$

2) Избавимся от отрицаний над сложными высказываниями, используя закон де Моргана и закон двойного отрицания;

$(\mathbf{J \wedge \neg K} \vee L \wedge M \wedge N) \wedge (\mathbf{\neg J \vee K \vee \neg L \vee \neg M \vee \neg N}) \wedge (\neg M \vee J).$

3) Раскроем скобки, одновременно используем законы поглощения и закон непротиворечия ($A \wedge \neg A = 0$). Для повышения наглядности будем записывать элементарные конъюнкции в скобках.

$(J \wedge \neg K \vee L \wedge M \wedge N) \wedge (\neg M \vee J) \wedge (\neg J \vee K \vee \neg L \vee \neg M \vee \neg N) =$

$((\cancel{J \wedge \neg K \wedge \neg M}) \vee (J \wedge \neg K) \vee (\cancel{L \wedge M \wedge \neg M \wedge N}) \vee (J \wedge L \wedge M \wedge N)) \wedge (\neg J \vee K \vee \neg L \vee \neg M \vee \neg N) =$

$(\cancel{J \wedge \neg J \wedge \neg K}) \vee (\cancel{J \wedge K \wedge \neg K}) \vee (J \wedge \neg K \wedge \neg M) \vee (J \wedge \neg K \wedge \neg N) \vee (J \wedge \neg K \wedge \neg L) \vee$

$(\cancel{J \wedge \neg J \wedge L \wedge M \wedge N}) \vee (J \wedge K \wedge L \wedge M \wedge N) \vee (\cancel{J \wedge L \wedge \neg L \wedge M \wedge N}) \wedge$

$(\cancel{J \wedge L \wedge M \wedge \neg M \wedge N}) \vee (\cancel{J \wedge L \wedge M \wedge N \wedge \neg N})$

Ответ: $(J \wedge \neg K \wedge \neg M) \vee (J \wedge \neg K \wedge \neg N) \vee (J \wedge \neg K \wedge \neg L) \vee (J \wedge K \wedge L \wedge M \wedge N)$.

Когда Вы приобретете навыки выполнения преобразований логических выражений, можно будет не записывать конъюнкции (произведения), тождественно равные нулю, вида ($A \wedge X \wedge \neg A$), где X – любые сомножители, а записывать 0 (ложь). Далее в справочнике будем придерживаться этого соглашения.

Запишем решение с использованием других обозначений операций.

1) Избавимся от импликации и от отрицаний сложных высказываний, используя закон де Моргана и закон двойного отрицания.

$$((J \to K) \to (MNL))(J\overline{K} \to \overline{MNL})(M \to J) =$$

$$(\overline{\overline{J}+K}\vee LMN)(\overline{J\overline{K}}\vee\overline{LMN})(\overline{M}\vee J)=$$

$$(J\overline{K}\vee LMN)(\overline{J}\vee K\vee\overline{L}\vee\overline{M}\vee\overline{N})(\overline{M}\vee J)$$

2) Раскроем скобки.

$$(J\overline{K} \vee LMN)(\overline{M} \vee J)(\overline{J} \vee K \vee \overline{L} \vee \overline{M} \vee \overline{N}) =$$

$$(J\overline{K}\,\overline{M} \vee J\overline{K} \vee 0 \vee JLMN)(\overline{J} \vee K \vee \overline{L} \vee \overline{M} \vee \overline{N}) =$$

$$(J\overline{K} \vee JLMN)(\overline{J} \vee K \vee \overline{L} \vee \overline{M} \vee \overline{N}) =$$

$$0 \vee 0 \vee J\overline{K}\,\overline{L} \vee J\overline{K}\,\overline{M} \vee J\overline{K}\,\overline{N} \vee 0 \vee JKLMN \vee 0 \vee 0 \vee 0 =$$

$$J\overline{K}\,\overline{L} \vee J\overline{K}\,\overline{M} \vee J\overline{K}\,\overline{N} \vee JKLMN$$

В результате преобразований получили ДНФ.

СДНФ и СКНФ

Элементарная конъюнкция (дизъюнкция) называется **полной** относительно аргументов функции, если каждая переменная входит в нее ровно один раз (либо с отрицанием, либо без него).

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) функции называется дизъюнкция полных правильных элементарных конъюнкций, равных единице на тех же наборах, что и функция.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) функции называется конъюнкция полных правильных элементарных дизъюнкций, равных нулю на тех же наборах, что и функция.

Построение СДНФ по таблице истинности.

Любую функцию, кроме констант 0 и 1, можно представить в виде как СДНФ, так и СКНФ.

Рассмотрим решение задач на примере. Пусть две логические функции трех переменных заданы таблицей истинности

Набор	***A***	***B***	***C***	$F_1(A,B,C)$	$F_2(A,B,C)$
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	0
3	0	1	1	1	1
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	1	1
6	1	1	0	0	0
7	1	1	1	1	0

Для функции $F_1(A,B,C)$ **построим СДНФ**. По определению количество полных конъюнкций (слагаемых, представляющих собой произведение всех аргументов функции с отрицанием или без) равно количеству единиц в таблице истинности. В данном примере три единицы – на наборах 3, 5, 7.

1) Для каждой строки таблицы истинности, содержащей единицу, строим полную конъюнкцию (произведение аргументов). Переменные, имеющие нуль в соответствующей строке, входят в произведение с отрицанием. Переменные, имеющие значение единицы – без отрицания.

Набор	***A***	***B***	***C***	***F*₁(*A*,*B*,*C*)**	***Полная конъюнкция***
3	0	1	1	1	$\neg A\wedge B\wedge C$
5	1	0	1	1	$A\wedge\neg B\wedge C$
7	1	1	1	1	$A\wedge B\wedge C$

2) Запишем дизъюнкцию конъюнкций (сумму произведений)

$F_1(A,B,C) = \neg\mathrm{A}\wedge\mathrm{B}\wedge\mathrm{C} \vee \mathrm{A}\wedge\neg\mathrm{B}\wedge\mathrm{C} \vee \mathrm{A}\wedge\mathrm{B}\wedge\mathrm{C}$

Получена СДНФ. Если потребуется минимизировать количество вхождений аргументов, можно упростить выражение, используя законы алгебры логики.

Построим СКНФ функции $F_2(A,B,C)$ по таблице истинности

1) Для каждой строки таблицы истинности с нулевым значением функции (наборы 2, 6, 7) запишем полную дизъюнкцию (логическую сумму аргументов), Переменные, имеющие значения 1 в строке, входят в эту сумму с отрицанием, а переменные со значением 0 – без отрицания:

Набор	***A***	***B***	***C***	***F*₂(*A*,*B*,*C*)**	***Полная дизъюнкция***
2	0	1	0	0	$A\vee\neg B\vee C$
6	1	1	0	0	$\neg A\vee\neg B\vee C$
7	1	1	1	0	$\neg A\vee\neg B\vee\neg C$

2) Все полученные дизъюнкции (логические суммы) связываются операциями конъюнкции.

$F_2(A,B,C) = (A\vee\neg B\vee C) \wedge (\neg A\vee\neg B\vee C) \wedge (\neg A\vee\neg B\vee\neg C)$.

Выбор способа построения логической функции зависит от количества 0 и 1 в таблице истинности функции: если в ней меньше 1, то лучше строить СДНФ и наоборот.

Пример 14 с выбором одного ответа

Дан фрагмент таблицы истинности выражения F

X	Y	Z	F
1	1	1	0

1	0	0	1
1	0	1	1

Какое выражение соответствует F?

1) ¬X∧¬Y∧¬Z

2) ¬X∨¬Y∨¬Z

3) X∧¬Y∨Z

4) ¬X∧¬Y∨¬Z

Решение. Полная таблица истинности для трех логических переменных должна состоять из 2^3=8 строк. По фрагменту таблицы невозможно восстановить выражение F. Можно лишь установить, какой из предложенных ответов **может** соответствовать фрагменту таблицы.

Определим значения выражений предложенных вариантов ответов:

X	Y	Z	F	¬X∧¬Y∧¬Z	¬X∨¬Y∨¬Z	X∧¬Y∨Z	¬X∧¬Y∨¬Z
1	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0

Ответ: № 2

Построение СДНФ логической функции

Ранее был описан алгоритм получения СДНФ по таблице истинности. Решим обратную задачу. Умение решать такие задачи может быть полезно, если задана сложная функция многих логических переменных и требуется выяснить, на каком количестве наборов она равна 1 или 0. Если решать задачу построением таблицы истинности, придется заполнять большое количество строк, например, для функции пяти переменных количество строк 2^5=32, и легко допустить ошибку.

Известно, что в СДНФ количество слагаемых равно количеству строк таблицы истинности, в которых функция принимает значение 1. Количество строк, в которых функция равна 0 определяется как разность между общим количеством строк таблицы истинности и количеством строк, в которых функция равна 1.

Подобные задачи относятся в спецификации ЕГЭ к заданиям высокого уровня сложности, а на их решение выделено до 10 минут.

Для построения СДНФ заданной логической функции необходимо

1) Перейти к ДНФ по алгоритму, описанному выше.
2) Неполные конъюнкции умножить на выражение вида $(X \vee \neg X) = 1$, где X – отсутствующая в неполной конъюнкции переменная. Это не изменит значения функции.

3) Применить закон идемпотентности $(X \vee X) = X$ для того чтобы в выражении не было повторяющихся конъюнкций.

Количество конъюнкций СДНФ соответствует количеству единиц в таблице истинности.

Рассмотрим пример. Построить СДНФ логической функции

$F(A,B,C) = A\wedge\neg B \vee A\wedge\neg C \vee A\wedge B\wedge C$.

1) Функция находится в ДНФ.
2) Домножим неполные конъюнкции (добавим отсутствующие переменные) и раскроем скобки

$A\wedge\neg B\wedge(\boldsymbol{C\vee\neg C}) \vee A\wedge\neg C\wedge(\boldsymbol{B\vee\neg B}) \vee A\wedge B\wedge C=$

$A\wedge\neg B\wedge C \vee \boldsymbol{A\wedge\neg B\wedge\neg C} \vee A\wedge B\wedge\neg C \vee \boldsymbol{A\wedge\neg B\wedge\neg C} \vee A\wedge B\wedge C$

3) Найдем равные конъюнкции и применим закон идемпотентности, получим

$A\wedge\neg B\wedge C \vee A\wedge\neg B\wedge\neg C \vee A\wedge B\wedge\neg C \vee A\wedge B\wedge C$

Вывод: в таблице истинности заданной функции четыре значения 1 из 2^3=8.

Рассмотрим решение заданий ЕГЭ на определение количества решений логического уравнения, содержащего большое количество логических переменных. Эти задания можно решать тремя способами:

1) Если Вы хорошо знаете алгебру логики, то сможете использовать «особенности» заданного выражения, и избежать построения полной таблицы истинности.
2) Построить таблицу истинности выражения.
3) Построить СДНФ заданного выражения.

Эти способы решения приведены ниже в примерах, Вы сможете выбрать наиболее удобный для Вас.

Пример 15 задания с кратким ответом

Сколько различных решений имеет уравнение

$J \wedge \neg K \wedge L \wedge \neg M \wedge (N \vee \neg N) = 0$,

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе указать количество наборов.

Решение.

Способ 1. Заметим, что выражение $N \vee \neg N$ всегда равно единице. Оставшиеся сомножители J, K, L, M образуют 2^4=16 различных наборов. Таблица истинности выражения $J \wedge \neg K \wedge L \wedge \neg M$ принимает значение 1 только на одном из 16 наборов (1010), на остальных 15 наборах выражение принимает значение 0. Учитывая, что N может принимать любое из двух значений 0 или 1, определим общее количество наборов 15*2=30. На оставшихся двух наборах таблицы истинности (10100 и 10101) функция принимает значение 1.

Ответ: 30.

Способ 2. Построить таблицу истинности заданного выражения, выполните самостоятельно.

Способ 3. Получить СДНФ, количество дизъюнкций (слагаемых) соответствует количеству единиц в таблице истинности.

$J \wedge \neg K \wedge L \wedge \neg M \wedge (N \vee \neg \mathrm{N}) = J \wedge \neg K \wedge L \wedge \neg M \wedge N \vee J \wedge \neg K \wedge L \wedge \neg M \wedge \neg \mathrm{N}$

В СДНФ входят две конъюнкции, на двух наборах выражение будет иметь значение 1, на оставшихся 32 – 2 = 30 наборах – значение 0.

Ответ: 30.

Далее рассмотрим более сложный вариант того же задания. Это задание – самое сложное в частях 1 и 2 ЕГЭ.

Пример 16 задания с кратким ответом

Сколько различных решений имеет уравнение

$((J \to K) \to (M \wedge N \wedge L)) \wedge ((J \wedge \neg K) \to \neg(M \wedge N \wedge L)) \wedge (M \to J) = 1$

где J, K, L, M, N – логические переменные?

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение.

Способ 1. Выражение можно рассматривать как конъюнкцию $A \wedge B \wedge C = 1$, где

$A = (J \to K) \to (M \wedge N \wedge L)$

$B = (J \wedge \neg K) \to \neg(M \wedge N \wedge L)$

$C = M \to J$.

Для решения уравнения A, B и C должны принимать значения 1. В соответствии с таблицей истинности операции импликации C=1 при трех наборах значений входящих в него переменных:

1) M=0, J=0
2) M=0, J=1
3) M=1, J=1

Рассмотрим, какие значения будут принимать A и B во всех трех случаях.

<table>
<tr><th>Значения</th><th>Вычисления</th><th>Выводы</th></tr>
<tr><td>M=0, J=0</td><td>$A = (0 \to K) \to 0 = 1 \to 0 = 0$</td><td>$A \wedge B \wedge C = 0$. Решений уравнения нет</td></tr>
<tr><td>M=0, J=1</td><td>$A = (1 \to K) \to 0 = K \to 0 = \neg K$.
A = 1 при K=0.

$B = (1 \wedge \neg K) \to \neg(0 \wedge N \wedge L) = \neg K \to 1 = K \vee 1 = 1$.
При вычислении B можно было сразу подставить K=0, при котором A=1.</td><td>K=0, значения L и N не влияют на результат. L и N образуют четыре различных набора, следовательно, уравнение имеет четыре решения.
<table>
<tr><th>J</th><th>K</th><th>L</th><th>M</th><th>N</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>M=1, J=1</td><td>$A = (1 \to K) \to (1 \wedge N \wedge L) = (0 \vee K) \to N \wedge L = \neg K \vee N \wedge L$

$B = (1 \wedge \neg K) \to \neg(1 \wedge N \wedge L) = \neg K \to \neg(N \wedge L) = K \vee \neg N \vee \neg L$

Пусть K=0. Тогда
$A = \neg 0 \vee N \wedge L = 1 \vee N \wedge L = 1$ при любых L и N.
$B = \neg N \vee \neg L$ и будет равно единице при трех наборах L и N в соответствии с таблицей истинности операции дизъюнкции.
Пусть K=1. Тогда
$A = 0 \vee N \wedge L = N \wedge L$. A будет равно единице при одном наборе N=1, L=1.
$B = 1 \vee \neg N \vee \neg L = 1$ при любых L и N.</td><td>При M=1, J=1, K=0 уравнение имеет три решения на наборах.
<table>
<tr><th>J</th><th>K</th><th>L</th><th>M</th><th>N</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>

При M=1, J=1, K=1 уравнение имеет одно решение на наборе 11111.</td></tr>
<tr><td></td><td>Количество решений</td><td>4+3+1=8</td></tr>
</table>

Ответ: 8

Способ 2. Построим таблицу истинности. Количество логических операций в заданном выражении – тринадцать. Определим порядок их выполнения в соответствии с приоритетами и скобками, при этом некоторые группы операций обозначим одним номером.

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{((\underbrace{J \to K}_{1}) \to (\underbrace{M \wedge N \wedge L}_{2}))}_{6} \wedge \underbrace{((\underbrace{J \wedge \neg K}_{3}) \to \neg(\underbrace{M \wedge N \wedge L}_{4}))}_{7}}_{8} \wedge (\underbrace{M \to J}_{5})}_{9}$$

Введем обозначения, проведем при этом некоторые преобразования, которые сделают построение таблицы истинности более удобным:

$F1 = J \to K = \neg J \vee K$ **F1 = ¬J ∨ K**

$F2 = M \wedge N \wedge L$ **F2 = M ∧ N ∧ L**

$F3 = J \wedge \neg K = \neg F1$ **F3 = ¬F1**

$F4 = \neg(M \wedge N \wedge L) = \neg F2$ **F4 = ¬F2**

$F5 = M \to J = \neg M \vee J$ **F5 = ¬M ∨ J**

$F6 = F1 \to F2 = \neg F1 \vee F2 = F3 \vee F2$ **F6 = F3 ∨ F2**

$F7 = F3 \to F4 = \neg F1 \to \neg F2 = F1 \vee F4$ **F7 = F1 ∨ F4**

$F8 = F6 \wedge F7$ **F8 = F6 ∧ F7**

$F9 = F8 \wedge F5$ **F9 = F8 ∧ F5**

Таблица истинности:

J	**K**	**L**	**M**	**N**	**F1**	**F2**	**F3**	**F4**	**F5**	**F6**	**F7**	**F8**	**F9**
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	**0**
0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	**0**
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	**0**
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	**0**
0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	**0**
0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	**0**
0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	**0**
0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	**0**
0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	**0**
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	**0**
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	**0**
0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	**0**
0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	**0**
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	**0**
0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	**0**
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	**0**
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	**1**
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**1**
1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	**1**
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**1**
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	**1**
1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	**1**

1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	**0**
1	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	**0**
1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	**0**
1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	**0**
1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	**0**
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	**0**
1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	**0**
1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	**0**
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	**1**

В таблице истинности выражения восемь значений равны 1, следовательно, уравнение имеет 8 решений.

Ответ: 8

Способ 3. Построим СДНФ. Будем записывать преобразования с использованием других обозначений операций

1) В примере 13 была получена ДНФ заданного выражения.
2) Приведем ДНФ к совершенной форме, умножая неполные конъюнкции на недостающие сомножители в виде (X ∨ ¬X).

$$J\overline{K}\,\overline{L} \vee J\overline{K}\,\overline{M} \vee J\overline{K}\,\overline{N} \vee JKLMN =$$

$$J\overline{K}\,\overline{L}(M \vee \overline{M})(N \vee \overline{N}) \vee J\overline{K}\,\overline{M}(L \vee \overline{L})(N \vee \overline{N}) \vee J\overline{K}\,\overline{N}(L \vee \overline{L})(M \vee \overline{M}) \vee JKLMN$$

Раскроем скобки и найдем совпадающие конъюнкции

$$J\overline{K}\,\overline{L}MN \vee J\overline{K}\,\overline{L}\,\overline{M}N \vee J\overline{K}\,\overline{L}M\overline{N} \vee J\overline{K}\,\overline{L}\,\overline{M}\,\overline{N} \vee$$

$$J\overline{K}L\overline{M}N \vee \underline{\underline{J\overline{K}\,\overline{L}\,\overline{M}N}} \vee \underline{\underline{J\overline{K}L\overline{M}\,\overline{N}}} \vee \underline{\underline{J\overline{K}\,\overline{L}\,\overline{M}\,\overline{N}}} \vee$$

$$J\overline{K}LM\overline{N} \vee \underline{\underline{J\overline{K}\,\overline{L}M\overline{N}}} \vee \underline{\underline{J\overline{K}L\overline{M}\,\overline{N}}} \vee \underline{\underline{J\overline{K}\,\overline{L}\,\overline{M}\,\overline{N}}} \vee JKLMN$$

Получим

$$J\overline{K}\,\overline{L}MN \vee J\overline{K}\,\overline{L}\,\overline{M}N \vee J\overline{K}\,\overline{L}M\overline{N} \vee J\overline{K}\,\overline{L}\,\overline{M}\,\overline{N} \vee J\overline{K}L\overline{M}N \vee J\overline{K}L\overline{M}\,\overline{N} \vee J\overline{K}LM\overline{N} \vee JKLMN$$

СДНФ состоит из восьми конъюнкций, следовательно, таблица истинности выражения имеет значение 1 на восьми наборах, которые легко определяются по конъюнкциям. В соответствии с записанным выражением СДНФ наборы равны 10011, 10001, 10010, 10000, 10101, 10100, 10110, 11111. Сравните их с таблицей истинности, полученной при решении задачи вторым способом.

Уравнение имеет 8 решений.

Ответ: 8

Пример 17 задания с кратким ответом

Сколько различных решений имеет уравнение

¬((A → B) → (C ∧ D ∧ E)) ∨ ¬((A ∧ ¬B) → ¬(C ∧ D ∧ E)) ∨ (C ∧ A) = 0

где A, B, C, D, E – логические переменные?

Решение

Для решения логических уравнений вида F(A,B,C,D,E) = 0 следует переходить к СКНФ, но если добавить отрицание к обеим частям уравнения, получим ¬F(A,B,C,D,E) = 1. Решение подобных уравнений рассмотрено в учебно-справочных материалах и использует переход к СДНФ.

$\overline{\overline{(A \to B) \to CDE} \vee \overline{(A\bar{B}) \to \overline{\overline{CDE}}}} \vee CA = 1$

Убираем следование

$\big((\bar{A} \vee B) \to CDE\big)\big((A\bar{B}) \to \overline{CDE}\big)\overline{CA} =$

$\big(\overline{\bar{A} \vee B} \vee CDE\big)\big(\overline{A\bar{B}} \vee \overline{CDE}\big)\overline{CA} =$

$(A\bar{B} \vee CDE)(\bar{A} \vee B \vee \bar{C} \vee \bar{D} \vee \bar{E})(\bar{A} \vee \bar{C}) =$

$(A\bar{B} \vee CDE)(\bar{A} \vee \bar{C})(\bar{A} \vee B \vee \bar{C} \vee \bar{D} \vee \bar{E})$

Раскроем скобки и применим закон непротиворечия

$(\cancel{A\bar{A}\bar{B}} \vee A\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}CDE \vee \cancel{C\bar{C}DE})(\bar{A} \vee B \vee \bar{C} \vee \bar{D} \vee \bar{E}) =$

$(A\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}CDE)(\bar{A} \vee B \vee \bar{C} \vee \bar{D} \vee \bar{E})$

Раскроем скобки и применим закон непротиворечия

$\cancel{A\bar{A}\bar{B}\bar{C}} \vee \bar{A}CDE \vee \cancel{AB\bar{B}\bar{C}} \vee \bar{A}BCDE \vee A\bar{B}\bar{C} \vee \cancel{\bar{A}C\bar{C}DE} \vee A\bar{B}\bar{C}\bar{D} \vee \cancel{\bar{A}CD\bar{D}E} \vee A\bar{B}\bar{C}\bar{E} \vee \cancel{\bar{A}CDE\bar{E}} =$

$\bar{A}CDE \vee \bar{A}BCDE \vee A\bar{B}\bar{C} \vee A\bar{B}\bar{C}\bar{D} \vee A\bar{B}\bar{C}\bar{E}$

применим закон поглощения

$\bar{A}CDE \vee \cancel{\bar{A}BCDE} \vee A\bar{B}\bar{C} \vee \cancel{A\bar{B}\bar{C}\bar{D}} \vee \cancel{A\bar{B}\bar{C}\bar{E}}$

Домножаем неполные конъюнкции для приведения к СДНФ

$\bar{A}CDE(\bar{B} \vee B) \vee A\bar{B}\bar{C}(\bar{D} \vee D)(\bar{E} \vee E) =$

$\bar{A}\bar{B}CDE \vee \bar{A}BCDE \vee A\bar{B}\bar{C}\bar{D}\bar{E} \vee A\bar{B}\bar{C}\bar{D}E \vee A\bar{B}\bar{C}D\bar{E} \vee A\bar{B}\bar{C}DE$

Количество слагаемых в СДНФ равно 6.

Ответ: 6

Пример 18 задания с кратким ответом

Сколько различных решений имеет система уравнений

$(a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b) \vee (c \wedge d) \vee (\neg c \wedge \neg d) = 1$

$(c \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge d) \vee (e \wedge f) \vee (\neg e \wedge \neg f) = 1$

$(e \wedge \neg f) \vee (\neg e \wedge f) \vee (g \wedge h) \vee (\neg g \wedge \neg h) = 1$

$(g \wedge \neg h) \vee (\neg g \wedge h) \vee (i \wedge j) \vee (\neg i \wedge \neg j) = 1$

где $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ – логические переменные?

В ответе запишите количество различных наборов значений $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$, при которых выполняется данная система равенств.

Решение:

1. При решении будем использовать более удобные обозначения логических операций. Система уравнений будет иметь вид:

$$a\,\bar{b} \vee \bar{a}\,b \vee c\,d \vee \bar{c}\,\bar{d} = 1$$

$$c\,\bar{d} \vee \bar{c}\,d \vee e\,f \vee \bar{e}\,\bar{f} = 1$$

$$e\,\bar{f} \vee \bar{e}\,f \vee g\,h \vee \bar{g}\,\bar{h} = 1$$

$$g\,\bar{h} \vee \bar{g}\,h \vee i\,j \vee \bar{\imath}\,\bar{\jmath} = 1$$

2. Так как все четыре логических выражения должны быть одновременно истинны, можно объединить их в одно операцией коньюнкции и приравнять единице (истине).

$$(a\,\bar{b} \vee \bar{a}\,b \vee c\,d \vee \bar{c}\,\bar{d})(c\,\bar{d} \vee \bar{c}\,d \vee e\,f \vee \bar{e}\,\bar{f}) \cdot$$

$$(e\,\bar{f} \vee \bar{e}\,f \vee g\,h \vee \bar{g}\,\bar{h})(g\,\bar{h} \vee \bar{g}\,h \vee i\,j \vee \bar{\imath}\,\bar{\jmath}) = 1$$

Таблица истинности выражения, в которое входят 10 логических переменных, состоит из $2^{10} = 1024$ строк. Будем искать другой подход к решению.

3. Заметим, что в выражениях используются операции исключающего или

$$x \oplus y = x\,\bar{y} \vee \bar{x}\,y$$

и эквиваленции

$$x \equiv y = x\,y \vee \bar{x}\,\bar{y}$$

которые связаны соотношением

$$x \equiv y = \overline{x \oplus y}$$

в соответствии с таблицей истинности

x	y	$x \oplus y$	$x \equiv y$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

4. Введем обозначения:

$K = a \oplus b$ $\quad\quad \bar{K} = a \equiv b$

$L = c \oplus d$ $\quad\quad \bar{L} = c \equiv d$

$M = e \oplus f$ $\quad\quad \bar{M} = e \equiv f$ (*)

$N = g \oplus h$ $\quad\quad \bar{N} = g \equiv h$

$O = i \oplus j$ $\quad\quad \bar{O} = i \equiv j$

Заметим, что переменные K, L, M, N, O взаимно независимы.

5. Система уравнений примет вид:

$K \vee \bar{L} = 1$

$L \vee \bar{M} = 1$

$M \vee \bar{N} = 1$

$N \vee \bar{O} = 1$

Объединим уравнения операцией конъюнкции, получим:

$(K \vee \bar{L})(L \vee \bar{M})(M \vee \bar{N})(N \vee \bar{O}) = 1$ (**)

6. Полученное уравнение можно решить двумя способами: построением таблицы истинности и приведением к СДНФ.

6.1. Способ 1. Построим таблицу истинности, она будет состоять из $2^5 = 32$ строк. Строки – решения (**) выделим цветом.

№ набора	*K*	*L*	*M*	*N*	*O*	*K*∨¬*L*	*L*∨¬*M*	*M*∨¬*N*	*N*∨¬*O*	Результат
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0
2	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0
3	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0
4	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0
5	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0
6	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
7	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
8	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
9	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
10	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
11	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
12	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0
13	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
14	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0
15	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
16	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
17	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0
18	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
19	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0
20	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
21	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0
22	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
23	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0
24	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1
25	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
26	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0
27	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0
28	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
29	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
30	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1

31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Получили шесть решений уравнения (**) для введенных обозначений (*).

6.2. Способ 2. Приведем выражение (**) к СДНФ. Известно, что в СДНФ количество слагаемых равно количеству строк таблицы истинности, в которых функция принимает значение «истина». Раскрывая скобки и используя закон непротиворечия ($A \wedge \neg A = 0$), получим:

$$(KL \vee K\bar{M} \vee \cancel{\bar{L}L} \vee \bar{L}\bar{M})(MN \vee M\bar{O} \vee \cancel{\bar{N}N} \vee \bar{N}\bar{O}) = 1$$

$$KLMN \vee KLM\bar{O} \vee KL\bar{N}\bar{O} \vee \cancel{K\bar{M}MN} \vee \cancel{K\bar{M}M\bar{O}} \vee K\bar{M}\bar{N}\bar{O} \vee \cancel{\bar{L}\bar{M}MN} \vee \cancel{\bar{L}\bar{M}M\bar{O}} \vee \bar{L}\bar{M}\bar{N}\bar{O} = 1$$

или

$$KLMN \vee KLM\bar{O} \vee KL\bar{N}\bar{O} \vee K\bar{M}\bar{N}\bar{O} \vee \bar{L}\bar{M}\bar{N}\bar{O} = 1$$

Получили ДНФ. Перейдем к СДНФ. Для этого неполные конъюнкции следует домножить на выражения вида ($A \vee \neg A = 1$), где A – отсутствующая в неполной конъюнкции переменная[2]:

$$KLMN(O \vee \bar{O}) \vee KLM\bar{O}(N \vee \bar{N}) \vee KL\bar{N}\bar{O}(M \vee \bar{M}) \vee K\bar{M}\bar{N}\bar{O}(L \vee \bar{L}) \vee \bar{L}\bar{M}\bar{N}\bar{O}(K \vee \bar{K}) = 1$$

Раскроем скобки, при этом переменные в элементарных конъюнкциях будем записывать в лексикографическом порядке, и используем закон идемпотентности (тавтологии, $A \vee A = A$), получим:

$$KLMNO \vee KLMN\bar{O} \vee \cancel{KLMN\bar{O}} \vee KLM\bar{N}\bar{O} \vee \cancel{KLM\bar{N}\bar{O}} \vee KL\bar{M}\bar{N}\bar{O} \vee \cancel{KL\bar{M}\bar{N}\bar{O}} \vee K\bar{L}\bar{M}\bar{N}\bar{O} \vee \cancel{K\bar{L}\bar{M}\bar{N}\bar{O}} \vee \bar{K}\bar{L}\bar{M}\bar{N}\bar{O} = 1$$

или

$$KLMNO \vee KLMN\bar{O} \vee KLM\bar{N}\bar{O} \vee KL\bar{M}\bar{N}\bar{O} \vee K\bar{L}\bar{M}\bar{N}\bar{O} \vee \bar{K}\bar{L}\bar{M}\bar{N}\bar{O} = 1$$

СДНФ содержит шесть слагаемых.

7. Все переменные таблицы истинности (и сомножители каждого слагаемого в СДНФ) взаимно независимы. Каждая из пяти переменных (*) в соответствии с таблицей истинности операций исключающего или и эквиваленции принимает значение «истина» при двух наборах переменных.

Таким образом, каждый набор в таблице истинности и каждое слагаемое в СДНФ будут принимать значение «истина» на $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ наборах значений исходных переменных $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$.

Тогда общее количество наборов будет равно $2^5 \cdot 6 = 192$, т.к. в таблице истинности шесть наборов удовлетворяют условию задачи, и СДНФ содержит шесть слагаемых.

Ответ: 192

---

[2] полная конъюнкция содержит в качестве сомножителей все логические переменные или их отрицания

Решение логических задач

Логические задачи разнообразны. Для их решения используются разные методы. Наиболее распространенными являются три: с помощью рассуждений; табличный и средствами алгебры логики. Часто при решении задач используют элементы всех трех методов.

Рассмотрим решение логических задач на примерах.

Решение логических задач с помощью рассуждений

Этот метод используется при решении несложных задач, небольшом количестве простых и понятных утверждений, не использующих логические связки.

Пример 19 задания с выбором одного ответа.

Виталий, Степан и Матвей поступили в разные вузы: технический, экономический, медицинский. На вопрос, куда поступили ребята, один из них ответил «Виталий поступил в технический вуз, Степан не поступал в технический вуз, Матвей не поступал в медицинский». Выяснилось, что в этом утверждении только одно истинно, а два других ложны. В какой вуз поступили мальчики?

1) Степан – в технический, Матвей – в медицинский, Виталий – в экономический
2) Степан – в медицинский, Матвей – в технический, Виталий – в экономический
3) Степан – в технический, Матвей – в экономический, Виталий – в медицинский
4) Степан – в медицинский, Матвей – в экономический, Виталий – в технический

Решение: Имеется три высказывания:

1) Виталий поступил в технический вуз
2) Степан не поступал в технический вуз
3) Матвей не поступал в медицинский.

Если верно первое высказывание, то верно и второе, что противоречит условию задачи. Следовательно, первое высказывание ложно.

Если верно второе высказывание, то первое и третье должны быть ложны. При этом получится, что никто не поступал в технический вуз. Это противоречит условию, поэтому второе утверждение тоже ложно.

Третье утверждение следует считать истинным. Тогда Степан поступил в технический вуз, Матвей – в экономический, Виталий – в медицинский.

Ответ: № 3

Пример 20 задания с выбором одного ответа.

Классный руководитель пожаловался директору, что у него в классе появилась компания из 3-х учеников, один из которых всегда говорит правду, другой всегда лжет, а третий говорит через раз то ложь, то правду. Директор знает, что их зовут Петя, Стас и Максим, но не знает, кто из них правдив, а кто – нет. Встретив однажды всех троих в коридоре, директор задал Пете два вопроса: "Ты всегда говоришь правду?" и "Стас всегда говорит правду?". На оба вопроса Петя ответил: "Нет". Директор понял, кто из них кто. Расположите первые буквы имен мальчиков в порядке: "говорит всегда правду", "всегда лжет", "говорит правду через раз". (Пример: если бы имена мальчиков были Рома, Толя и Вася, ответ мог бы быть: РТВ)

Решение:

Проверим три предположения: Петя всегда говорит правду, Петя всегда лжет и Петя говорит правду через раз.

1) Допустим, Петя всегда говорит правду. Его ответ "Нет" на вопрос "Ты всегда говоришь правду?" противоречит этому предположению
2) Допустим, Петя всегда лжет. Его ответ "Нет" на вопрос "Ты всегда говоришь правду?" – правдивый, что противоречит его убеждениям – всегда лгать.
3) Допустим, Петя говорит правду через раз. Его ответ "Нет" на вопрос "Ты всегда говоришь правду?" – правдивый, а ответ "Нет" на второй вопрос "Стас всегда говорит правду?" – ложь. Следовательно, Стас всегда говорит правду, а Максим лжец.

Ответ: СМП

Решение логических задач с помощью таблиц

При использовании этого метода заголовки строк и столбцов таблицы формируются из условий задачи. В клетках таблицы обозначают каким-либо способом истинность или ложность соответствия заголовков строки и столбца. Для обозначения используют 1 и 0 или И и Л или символы + и –. После решения задачи не должно оставаться пустых клеток, а в каждой строке и в каждом столбце, как правило, хотя бы одна клетка помечается как истинная.

Достоинство этого метода заключается в его наглядности. Важно, что если в клетке таблицы установлена истина, то можно сделать вывод о состоянии клеток соответствующих строки и столбца. Часто все остальные клетки строки и столбца будут иметь значение ложь.

Пример 21 задания с кратким ответом

В спортивном комплексе работают секции акробатики, волейбола, гимнастики, плавания, фигурного катания и хоккея. Каждую секцию посещает один из друзей: Борис, Володя и Сергей. Каждый из них занимается двумя видами спорта. Определите, какие секции посещает каждый из них, если известно, что

1) Сергей – самый высокий
2) Занимающийся плаванием меньше ростом занимающегося фигурным катанием
3) Увлекающиеся плаванием, фигурным катанием и Борис любят конфеты
4) Сергей хорошо знает информатику и помогает решать задачи акробату и волейболисту
5) Борис не волейболист и не гимнаст.

В ответе запишите первые буквы имен мальчиков, посещающих секции акробатики, волейбола, гимнастики, плавания, фигурного катания и хоккея. Например, если Коля – пловец и гимнаст, Петя – акробат и фигурист, Саша – волейболист и хоккеист, ответ будет таким: **ПСККПС**

Решение.

По условию задачи три друга посещают по 2 секции из шести, значит, каждый занимается тем видом спорта, которым не увлекаются остальные.

Составим таблицу, в строках которой запишем имена мальчиков, в столбцах – первые буквы названий видов спорта. Обратите внимание на порядок столбцов – он соответствует последовательности записи ответа. Затем будем отмечать в клетках таблицы следствия из пяти заданных высказываний.

	А	В	Г	П	Ф	Х
Борис		–	–	–	–	
Володя				+		
Сергей	–	–		–		

1) Из первого и второго высказываний следует, что Сергей – не пловец. Запишем ″–″ в таблицу на пересечении строки Сергей и столбца П
2) Из третьего высказывания следует, что Борис – не пловец и не фигурист, пометим клетки знаком ″–″.
3) В столбце П осталась только одна свободная клетка, запишем в нее + (Володя занимается плаванием).
4) Сергей не акробат и не волейболист (высказывание 4). Ставим минусы.
5) Борис не волейболист и не гимнаст.

В полученной таблице осталась одна непомеченная клетка в столбце В и две – в строке Бориса. Можно сделать вывод, что Володя занимается волейболом. Так как каждый мальчик занимается двумя видами спорта, можно сделать вывод, что Борис – акробат и хоккеист. Запишем полученную таблицу

	А	В	Г	П	Ф	Х
Борис	+	–	–	–	–	+
Володя		+		+		
Сергей	–	–		–		

Поставим минусы в столбцах А и Х, а также в строке Володя, т.к. для него уже определены два вида спорта.

	А	В	Г	П	Ф	Х
Борис	+	–	–	–	–	+
Володя	–	+	–	+	–	–
Сергей	–	–		–		–

В полученной таблице не заполнены две клетки, которые соответствуют тому, что Сергей занимается гимнастикой и фигурным катанием. Окончательно таблица имеет вид

	А	В	Г	П	Ф	Х
Борис	+	–	–	–	–	+
Володя	–	+	–	+	–	–
Сергей	–	–	+	–	+	–

Ответ: БВСВСБ

Пример 22 задания с кратким ответом

На одной улице стоят в ряд 4 дома, в которых живут 4 человека: Алексей, Егор, Виктор и Михаил. Известно, что каждый из них владеет ровно одной из следующих профессий: Токарь, Столяр, Хирург и Окулист, но неизвестно, кто какой, и неизвестно, кто в каком доме живет. Однако, известно, что:

1) У Окулиста два соседа
2) Хирург живет левее Токаря
3) Столяр живет с краю
4) Хирург живет рядом со Столяром
5) Алексей живет левее Окулиста
6) Виктор — не Токарь
7) Михаил живет рядом с Хирургом
8) Виктор живет рядом со Столяром

Выясните, кто где живет, и дайте ответ в виде перечня заглавных букв имен людей, в порядке слева направо. Например, если бы в домах жили (слева направо) Константин, Николай, Роман и Олег, ответ был бы: КНРО.

Решение.

По условию задачи требуется установить не только профессию, но и последовательность домов. Каждый человек имеет одну профессию и живет в одном из домов. Заметим, что первые символы имен и профессий не совпадают, поэтому будем использовать их в таблицах.

Составим таблицу, в которой укажем номера домов и профессии.

	1	2	3	4
О				
С				
Т				
Х				

а

	1	2	3	4
О	–			–
С		–	–	
Т	–			
Х	–			–

б

	1	2	3	4
О	–			–
С	+	–	–	–
Т	–			+
Х	–	+		–

в

	1	2	3	4
О	–	–	+	–
С	+	–	–	–
Т	–	–	–	+
Х	–	+	–	–

г

Рис. 2

Из первого утверждения следует, что Окулист живет не в первом и не в четвертом доме.

Из второго утверждения следует, что

- Хирург живет не в четвертом доме, т.к. в противном случае он не мог бы жить левее Токаря;
- Токарь живет не в первом доме, т.к. левее нет домов

Столяр не живет в домах 2 и 3. Если Хирург живет рядом со Столяром, то он не может жить в первом доме, а может во втором или третьем. Состояние таблицы показано на рис. 2.б.

Можно утверждать, что Столяр живет в первом доме, т.к. в первом столбце осталась одна непомеченная клетка. Запишем в клетке С1 знак плюс, в клетке С4 знак минус. Тогда Токарь живет в четвертом доме, а Хирург рядом со столяром во втором доме (рис. 2.в). Остается проставить знаки минус в столбцах и строках, где уже есть знак плюс. Окулист живет в третьем доме.

Определим профессии людей. Для этого составим вторую таблицу, в которой профессии упорядочим по расположению домов.

	С	Х	О	Т
А		–	–	–
Е		–		
В	–	+	–	–
М		–		

	С	Х	О	Т
А	+	–	–	–
Е	–	–		
В	–	+	–	–
М	–	–		

	С	Х	О	Т
А	+	–		–
Е	–	–	–	
В	–	+	–	–
М	–	–	+	–

	С	Х	О	Т
А	+	–	–	–
Е	–	–	–	+
В	–	+	–	–
М	–	–	+	–

а б в г

Рис. 3

Из высказывания 5 следует, что Алексей не Токарь и не Окулист. Внесем пометки в таблицу.

Виктор живет рядом со Столяром, значит, Виктор Хирург. Ставим отметки в таблицу (Рис. 3.а). По таблице видно, что Алексей – Столяр. Проставим отметки (рис. 3.б).

Михаил живет рядом с Хирургом, значит, Михаил – Окулист (рис. 3.в).

Осталась одна незаполненная клетка. Егор – Токарь (рис. 3.г).

Ответ: АВМЕ.

Решение логических задач с использованием алгебры логики

В заданиях ЕГЭ иногда используются сложные логические высказывания, которые могут быть истинными или ложными. Для решения таких задач удобно использовать средства алгебры логики. Последовательность действий:

1. Выделить простые высказывания и определить логические связки составных высказываний (логические операции)
2. Ввести обозначения простых высказываний, записать сложные высказывания с использованием этих обозначений
3. Построить логическую формулу, описывающую условие задания
4. Определить значение истинности этой формулы.

Пример 23 задания с кратким ответом

Друзья попытались выяснить, собака какой породы стала победителем прошлогодней выставки. Ниже даны утверждения ребят:

Паша: победила Такса

Борис: победила либо Овчарка, либо Такса

Аня: Борис неправ

Коля: Овчарка точно не победила

Ира: Ни Лабрадор, ни Овчарка не победили

Вася: Ни Лабрадор, ни Такса не победили

Маша: Лабрадор точно не победил

Коля: Ира ошибается

Оля: победила Овчарка

Собака какой породы победила на выставке, если известно, что из девяти высказываний истины только три?

Ответ запишите в виде первой буквы породы.

Решение:

Во всех высказываниях упоминаются только Такса, Овчарка или Лабрадор. Можно считать, что победила собака одной из этих трех пород. Введем обозначения логических высказываний:

Т – победила Такса

О – победила Овчарка

Л – победил Лабрадор

и запишем высказывания с использованием введенных обозначений.

Будем проверять истинность всех девяти высказываний при истинности одного из трех предположений о победителе. Результат запишем в таблицу.

Условие задачи		Т=1	О=1	Л=1
Паша	Т	1	0	0
Борис	$О \wedge \neg Т \vee \neg О \wedge Т$	1	1	0
Аня	$\neg Т$	0	1	1
Коля	$\neg О$	1	0	1
Ира	$\neg Л \wedge \neg О$	1	0	0
Лена	$\neg Л \wedge \neg Т$	0	1	0
Маша	$\neg Л$	1	1	0
Коля	$Л \vee О$	0	1	1
Ирина	О	0	1	0
Количество истинных высказываний		5	6	3

.

Победил Лабрадор.

Ответ: Л

Пример 24 задания с кратким ответом

Четыре студента – Денис, Коля, Рустем и Соня по итогам сессии стали лучшими, но пока неизвестно, кто из них на каком месте находится. Сокурсники высказали предположения о распределении мест:

1) Первым будет Денис, вторым – Коля
2) Вторым будет Рустем, четвертой – Соня
3) Денис будет вторым, Соня – третьей

Когда появились результаты рейтинга, оказалось, что в каждом предположении одно высказывание было истинным, а другое ложным.

Как распределились места в рейтинге? В ответе укажите первые буквы имен студентов с первого до четвертого места.

Решение. Введем обозначения высказываний. Д1 – Денис занял первое место, К2 – Коля занял второе место и т.д. Буква будет обозначать имя, цифра – место в рейтинге.

Сразу оговоримся, что высказывания вида $Д1 \wedge Д2 = 0$, т.к. один человек не может занимать два места в рейтинге. Высказывания вида $Д1 \wedge К1 = 0$, т.к. одно место не могут занять два студента. Конъюнкции, содержащие подобные сомножители, будем вычеркивать.

Каждое составное высказывание содержит одно истинное и одно ложное, чему соответствует логическая связка «либо А либо В, но не оба вместе», или операция исключающего или. Составные высказывания будут иметь вид $A \wedge \neg B \vee \neg A \wedge B$.

1) $Д1 \wedge \neg К2 \vee \neg Д1 \wedge К2$
2) $Р2 \wedge \neg С4 \vee \neg Р2 \wedge С4$
3) $Д2 \wedge \neg С3 \vee \neg Д2 \wedge С3$

Все три логических выражения должны выполняться одновременно, значит, они связаны логической операцией И (логическим умножением, конъюнкцией). Составим выражение и раскроем скобки:

$(Д1 \wedge \neg К2 \vee \neg Д1 \wedge К2) \wedge (Р2 \wedge \neg С4 \vee \neg Р2 \wedge С4) \wedge (Д2 \wedge \neg С3 \vee \neg Д2 \wedge С3) =$

$(Д1 \wedge \neg К2 \wedge Р2 \wedge \neg С4 \vee \cancel{Д1 \wedge \neg К2 \wedge \neg Р2 \wedge С4} \vee$

$\cancel{\neg Д1 \wedge К2 \wedge Р2 \wedge \neg С4} \vee \neg Д1 \wedge К2 \wedge \neg Р2 \wedge С4) \wedge (Д2 \wedge \neg С3 \vee \neg Д2 \wedge С3)$

Слагаемое $Д1 \wedge \neg К2 \wedge \neg Р2 \wedge С4 = 0$, т.к. на одно третье место претендуют два студента – Коля и Рустем. Продолжим преобразования:

$(Д1 \wedge \neg К2 \wedge Р2 \wedge \neg С4 \vee \neg Д1 \wedge К2 \wedge \neg Р2 \wedge С4) \wedge (Д2 \wedge \neg С3 \vee \neg Д2 \wedge С3)=$

$\cancel{Д1 \wedge \neg К2 \wedge Р2 \wedge \neg С4 \wedge Д2 \wedge \neg С3} \vee Д1 \wedge \neg К2 \wedge Р2 \wedge \neg С4 \wedge \neg Д2 \wedge С3 \vee$

$\cancel{\neg Д1 \wedge К2 \wedge \neg Р2 \wedge С4 \wedge Д2 \wedge \neg С3} \vee \cancel{\neg Д1 \wedge К2 \wedge \neg Р2 \wedge С4 \wedge \neg Д2 \wedge С3} =$

$Д1 \wedge \neg К2 \wedge Р2 \wedge \neg С4 \wedge \neg Д2 \wedge С3$

Из полученной конъюнкции следует, что Денис – на первом месте, Рустем – на втором, Соня – на третьем, Коля – на четвертом.

Ответ: ДРСК.

Решения заданий демоварианта 2012

Задание А3

Характеристики задания

Проверяемые элементы содержания	Умения строить таблицы истинности и логические схемы
Контролируемый элемент содержания (по кодификатору)	1.5.1. Высказывания, логические операции, кванторы, истинность высказывания
Требования к уровню подготовки (по кодификатору)	1.3.1. Строить модели объектов, систем и процессов в виде таблицы истинности для логического высказывания
Вид деятельности	Применение знаний и умений в стандартной ситуации
Уровень	базовый
Максимальный первичный балл	1
Время выполнения	2 мин.

Задание

А3 Дан фрагмент таблицы истинности выражения F:

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
1	1	1	1

Каким может быть выражение F?

1) $X \wedge Y \wedge Z$ 2) $\neg X \vee \neg Y \vee Z$ 3) $X \vee Y \vee Z$ 4) $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$

Решение

Если бы таблица истинности была задана полностью, т.е. на всех наборах переменных X, Y и Z, можно было бы решить это задание построением КНФ или ДНФ.

Самый простой способ решения этого задания – подстановка значений переменных из строк таблицы истинности в предложенные в ответах выражения и сравнение результата вычисления выражения с соответствующим значением F в заданном фрагменте таблицы истинности. Выражение, значения которого для всех трех наборов аргументов будут совпадать со значениями, указанными в таблице, и есть правильный ответ.

X	**Y**	**Z**	**F**	$X \wedge Y \wedge Z$	$\neg X \vee \neg Y \vee Z$	$X \vee Y \vee Z$	$\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$
0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0

Значения выражения варианта ответа № 1 совпадают с F на всех заданных наборах.

Ответ: № 1

Задание A10

Характеристики задания

Проверяемые элементы содержания	Знание основных понятий и законов математической логики
Контролируемый элемент содержания (по кодификатору)	1.5.1. Высказывания, логические операции, кванторы, истинность высказывания
Требования к уровню подготовки (по кодификатору)	1.3.2. Вычислять логическое значение сложного высказывания по известным значениям элементарных высказываний
Вид деятельности	Воспроизведение представлений или знаний (при выполнении практических заданий)
Уровень	повышенный
Максимальный первичный балл	1
Время выполнения	2 мин.

Задание

A10 Какое из приведенных имен удовлетворяет логическому условию

(первая буква согласная → вторая буква согласная) ∧ (предпоследняя буква гласная → последняя буква гласная)

1) КРИСТИНА 2) МАКСИМ 3) СТЕПАН 4) МАРИЯ

Решение

Проще всего решить данную задачу с помощью построения таблицы истинности

Введем обозначения высказываний:

A – первая буква согласная,

B – вторая буква согласная,

C – предпоследняя буква гласная

D – последняя буква гласная.

Логическое условие можно записать в виде выражения $(A \to B) \land (C \to D)$.

Запишем в таблицу истинность каждого высказывания для каждого варианта ответа.

Затем заполним в таблице столбцы, соответствующие логическим выражениям

	A	**B**	**C**	**D**	$(A \to B)$	$(C \to D)$	$(A \to B) \land (C \to D)$
КРИСТИНА	1	1	0	1	1	1	1
МАКСИМ	1	0	1	0	0	0	0
СТЕПАН	1	1	1	0	1	0	0
МАРИЯ	1	0	1	1	0	1	0

В первой строке заданное логическое условие принимает значение истина. Правильный ответ – КРИСТИНА

Ответ: № 1

Задание B15

Характеристики задания

Проверяемые элементы содержания	Умение строить и преобразовывать логические выражения
Контролируемый элемент содержания (по кодификатору)	1.5.1. Высказывания, логические операции, кванторы, истинность высказывания
Требования к уровню подготовки (по кодификатору)	1.3.2. Вычислять логическое значение сложного высказывания по известным значениям элементарных высказываний
Вид деятельности	Применение знаний и умений в новой ситуации
Уровень	высокий
Максимальный первичный балл	1
Время выполнения	10 мин.

Задание

$\boxed{\textbf{B14}}$ Сколько существует различных наборов значений логических переменных x_1, x_2, …, x_9, x_{10}, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?

$$\big((x_1 \equiv x_2) \lor (x_3 \equiv x_4)\big) \land \big(\neg(x_1 \equiv x_2) \lor \neg(x_3 \equiv x_4)\big) = 1$$

$$\big((x_3 \equiv x_4) \lor (x_5 \equiv x_6)\big) \land \big(\neg(x_3 \equiv x_4) \lor \neg(x_5 \equiv x_6)\big) = 1$$

...

$$\big((x_7 \equiv x_8) \lor (x_9 \equiv x_{10})\big) \land \big(\neg(x_7 \equiv x_8) \lor \neg(x_9 \equiv x_{10})\big) = 1$$

В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений x_1, x_2, …, x_9, x_{10}, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.

Решение

Задание отличается от рассмотренного выше в примере 18 логической связкой двух частей выражения – в примере они были связаны дизъюнкцией, в демоварианте – конъюнкцией. Кроме того, здесь записаны операции эквиваленции и ее отрицания, а в примере 18 те же операции записаны в нормальной форме.

1. Введем обозначения:

$$A = x_1 \equiv x_2 \qquad \bar{A} = \overline{x_1 \equiv x_2}$$

$$B = x_3 \equiv x_4 \qquad \bar{B} = \overline{x_3 \equiv x_4}$$

$$C = x_5 \equiv x_6 \qquad \bar{C} = \overline{x_5 \equiv x_6}$$

$$D = x_7 \equiv x_8 \qquad \bar{D} = \overline{x_7 \equiv x_8}$$

$$F = x_9 \equiv x_{10} \qquad \bar{F} = \overline{x_9 \equiv x_{10}}$$

Заметим, что переменные A, B, C, D, F взаимно независимы.

2. При решении будем использовать более удобные обозначения логических операций. Так как все четыре логических выражения должны быть одновременно истинны, объединим их в одно операцией коньюнкции и приравняем единице (истине).

$$(A \lor B)(\bar{A} \lor \bar{B})(B \lor C)(\bar{B} \lor \bar{C})(C \lor D)(\bar{C} \lor \bar{D})(D \lor F)(\bar{D} \lor \bar{F}) = 1$$

Раскроем пары скобок

$$(A\,\bar{B} \lor \bar{A}\,B)(B\,\bar{C} \lor \bar{B}\,C)(C\,\bar{D} \lor \bar{C}\,D)(D\bar{F} \lor \bar{D}\,F) = 1$$

3. Полученное уравнение можно решить двумя способами: построением таблицы истинности и приведением к СДНФ.

Способ 1. Построим таблицу истинности, она будет состоять из $2^5 = 32$ строк. Строки – решения уравнения выделим цветом.

Перепишем уравнение для удобства составления таблицы истинности

$$(A \oplus B)(B \oplus C)(C \oplus D)(D \oplus F) = 1$$

№ набора	*A*	*B*	*C*	*D*	*F*	*A*⊕*B*	*B*⊕*C*	*C*⊕*D*	*D*⊕*F*	Результат
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0
3	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
4	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
5	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0
6	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
7	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0
8	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
9	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0
10	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1
11	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0
12	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0
13	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
14	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0
15	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
16	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
18	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
19	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0
20	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0
21	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
22	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0
23	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
24	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
25	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
26	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
27	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0
28	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
29	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0

30	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
31	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0

Получили два решения уравнения для введенных обозначений.

Способ 2. Приведем левую часть уравнения к СДНФ. Известно, что в СДНФ количество слагаемых равно количеству строк таблицы истинности, в которых функция принимает значение «истина». Раскроем скобки, при этом переменные в элементарных конъюнкциях будем записывать в лексикографическом порядке и используя закон непротиворечия ($A \wedge \neg A = 0$), получим:

$(A\,\bar{B} \vee \bar{A}\,B)(B\,\bar{C} \vee \bar{B}\,C)(C\,\bar{D} \vee \bar{C}\,D)(D\bar{F} \vee \bar{D}\,F) = 1$

$(\cancel{AB\bar{B}\bar{C}} \vee A\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}B\bar{C} \vee \cancel{AB\bar{B}C})(\cancel{CD\bar{D}\bar{F}} \vee C\bar{D}F \vee \bar{C}D\bar{F} \vee \cancel{CD\bar{D}F}) = 1$

$(A\bar{B}C \vee \bar{A}B\bar{C})(C\bar{D}F \vee \bar{C}D\bar{F}) = 1$

или

$A\bar{B}C\bar{D}F \vee \cancel{A\bar{B}C\bar{C}D\bar{F}} \vee \cancel{\bar{A}BC\bar{C}\bar{D}F} \vee \bar{A}B\bar{C}D\bar{F} = 1$

$A\bar{B}C\bar{D}F \vee \bar{A}B\bar{C}D\bar{F} = 1$

Получили СДНФ, которая содержит два слагаемых.

4. Все переменные таблицы истинности (и сомножители каждого слагаемого в СДНФ) взаимно независимы. Каждая из пяти переменных A, B, C, D, F и ее отрицание в соответствии с таблицей истинности операций эквиваленции принимает значение «истина» при двух наборах переменных.

Таким образом, каждый набор в таблице истинности и каждое слагаемое в СДНФ будут принимать значение «истина» на $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$ наборах значений исходных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_9, x_{10}$.

Тогда общее количество наборов исходных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_9, x_{10}$ будет равно $2^5 \cdot 2 = 64$, т.к. и в таблице истинности два набора удовлетворяют условию задачи, и СДНФ содержит два слагаемых.

Ответ: 64

Задания для самостоятельного решения

Задания с выбором одного ответа

№ 1

Для составления цепочек разрешается использовать бусины четырех типов, обозначенные буквами Н, У, Ы, Х. Каждая цепочка должна состоять из четырех бусин, при этом должны соблюдаться правила:

- любая цепочка начинается с согласной,
- любая цепочка заканчивается буквой Ы или У,
- на втором месте не может стоять гласная.

Какая из цепочек построена по этим правилам?

1) ЫХХУ 2) ХЫХЫ 3) НУХЫ 4) НХЫЫ

№ 2

Пятеро студентов, желающих защитить курсовую работу, записали свои пожелания на очередность: Мария хочет защищаться первой или третьей; Евгений – только последним; Жанна хочет быть второй или третьей; Алексей – четвертым или пятым; Илья – первым или вторым. Предложено четыре варианта очереди. Какой из них устроит всех? (М – Мария, Е – Евгений, Ж– Жанна, А – Алексей, И – Илья)

1) М И Ж Е А 2) И Ж М Е А 3) И Ж М А Е 4) М Ж А И Е

№ 3

Таблица истинности логической функции $F = A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B$ имеет вид

A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1)

A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2)

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3)

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

4)

№ 4

Дан фрагмент таблицы истинности выражения F

X	Y	Z	F
1	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1

Какое выражение может соответствовать F?

1) $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$

2) $\neg X \vee \neg Y \wedge \neg Z$

3) $X \wedge \neg Y \vee Z$

4) $X \wedge \neg Y \vee \neg Z$

№ 5

Для какого из указанных значений числа X истинно выражение

$\neg((X - 2 > 6) \vee (X - 4 > 8)) \wedge \neg(X*3 > 25)$?

1) 7 2) 9 3) 11 4) 12

№ 6

Укажите тождественно истинное выражение

1) $\neg A \vee \neg B \wedge (\neg A \vee A \wedge B) \vee \neg B$

2) $A \wedge (\neg A \wedge B \vee A \wedge \neg B) \vee \neg A$

3) $A \wedge (\neg A \wedge B \vee A \wedge \neg B) \wedge \neg A$

4) $A \vee B \wedge (\neg A \vee A \wedge B) \vee \neg B$

№ 7

Логическое выражение $\neg(A \wedge B \vee \neg C) \vee \neg A \wedge B$ равносильно выражению

1) 0

2) $\neg A \wedge B \vee \neg A \wedge C \vee \neg B \wedge C$

3) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

4) $\neg A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg C \vee \neg B \wedge \neg C$

Задания с кратким ответом

№ 8

Классный руководитель пожаловался директору, что у него в классе появилась компания из 3-х учеников, один из которых всегда говорит правду, другой всегда лжет, а третий говорит через раз то ложь, то правду. Директор знает, что их зовут Петя, Семен и Максим, но не знает, кто из них правдив, а кто – нет. Однажды все трое опоздали на урок. Он вызвал всех троих в кабинет и поговорил с мальчиками. Петя сказал: "По крайней мере часть утверждений Семена правдива". Семен сказал: "Петя сказал про меня неправду". Директор понял, кто из них кто. Расположите первые буквы имен мальчиков в порядке: "говорит всегда правду", "всегда лжет", "говорит правду через раз". (Пример: если бы имена мальчиков были Рома, Толя и Вася, ответ мог бы быть: РТВ)

№ 9

На одной улице стоят в ряд 4 дома, в которых живут 4 человека: Алексей, Егор, Виктор и Михаил. Известно, что каждый из них владеет ровно одной из следующих профессий: Токарь, Столяр, Хирург и Окулист, но неизвестно, кто какой, и неизвестно, кто в каком доме живет. Однако, известно, что:

1) Хирург живет рядом с Окулистом

2) Окулист живет правее Столяра

3) Токарь живет рядом с Хирургом и Столяром

4) Алексей живет рядом с Токарем

5) Егор не живет рядом с Хирургом

6) Михаил живет левее Алексея

Выясните, кто где живет, и дайте ответ в виде перечня заглавных букв **имен людей**, в порядке слева направо. Например, если бы в домах жили (слева направо) Константин, Николай, Роман и Олег, ответ был бы: КНРО

№ 10

Девять ребят нашли на улице бездомного котёнка. Один из них взял этого котёнка домой. Необходимо установить, кто из ребят взял домой котёнка. Ниже даны утверждения ребят.

Паша:	это сделал Вася
Борис:	это сделал либо Вася, либо Паша
Аня:	Паша неправ
Сергей:	Маша этого не делала
Андрей:	Ни Маша, ни Паша этого не делали
Вася:	Ни Вася, ни Паша этого не делали
Маша:	Паша этого не делал
Коля:	Андрей неправ
Ирина:	это сделала Маша

Кто взял домой котёнка, если известно, что из девяти высказываний истинны только четыре? Ответ запишите в виде первой буквы имени.

№ 11

Три знатока чая попробовали один сорт, не зная, что это за чай. После дегустации они высказали предположения

1) чай Ахмад, произведен в Англии;
2) чай Ристон, произведен в Индии;
3) чай Беседа, произведен не в Англии.

Выяснилось, что каждый знаток прав только в одном из двух своих высказываний.

Какой это был чай и в какой стране он был изготовлен? В ответе запишите две первые буквы: название чая и страны выпуска. Например, если чай выпущен в Китае и называется Сенча, то в ответе надо записать СК.

№ 12

Сколько различных решений имеет уравнение

$((J \vee \neg K \vee L) \to \neg(M \to \neg N)) \wedge ((M \wedge N) \to (J \vee \neg K \vee L)) \wedge (M \vee N \vee \neg K) = 1$

где J, K, L, M, N – логические переменные?

№ 13

Сколько различных решений имеет уравнение

$\neg((J \to K) \to (M \wedge N \wedge L)) \vee \neg((J \wedge \neg K) \to \neg(M \wedge N \wedge L)) \vee (M \wedge J) = 0$

где J, K, L, M, N – логические переменные?

№ 14

Сколько различных решений имеет уравнение

$\neg((J \to K) \to (M \wedge N \wedge L)) \vee \neg((M \wedge N \wedge L) \to (\neg J \vee K)) \vee (M \wedge J) = 0$

где J, K, L, M, N – логические переменные?

№ 15

Сколько различных решений имеет уравнение

$((J \to K) \to (M \wedge N \wedge L)) \wedge ((M \wedge N \wedge L) \to (\neg J \vee K)) \wedge (M \to J) = 1$

где J, K, L, M, N – логические переменные?