Системы счисления

Оглавление

Краткие теоретические сведения 3
Двоичная система счисления.. 5
Восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления.. 5
Перевод числа из одной позиционной системы счисления в другую 6
Перевод числа из P-ичной системы счисления в десятичную систему счисления 7
Перевод числа из десятичной системы счисления в P-ичную систему счисления 8
Перевод чисел в системах счисления с основаниями степеней двойки 10
Двоичная арифметика 12
Примеры решения заданий.. 14
Пример 1. Задание с кратким ответом.. 14
Пример 2. Задание с кратким ответом.. 14
Пример 3. Задание с кратким ответом.. 15
Пример 4. Задание с кратким ответом.. 15
Пример 5. Задание с кратким ответом.. 15
Пример 6. Задание с кратким ответом.. 16
Пример 7. Задание с кратким ответом.. 16
Пример 8. Задание с кратким ответом.. 17
Пример 9. Задание с кратким ответом.. 17
Пример 10. Задание с кратким ответом.. 18
Пример 11. Задание с кратким ответом.. 18
Пример 12. Задание с кратким ответом.. 18
Пример 13. Задание с выбором одного ответа.. 19
Пример 14. Задание с выбором одного ответа.. 19
Пример 15. Задание с кратким ответом.. 19
Пример 16. Задание с кратким ответом.. 20

Пример 17. Задание с кратким ответом........20
Пример 18. Задание с кратким ответом........21
Пример 19. Задание с кратким ответом........21
Пример 20. Задание с кратким ответом........22
Пример 21. Задание с кратким ответом........22
Пример 22. Задание с выбором одного ответа........22
Пример 23. Задание с выбором одного ответа........23
Решения заданий демоварианта 2012........24
Задание А1........24
Характеристики задания........24
Задание........24
Решение........24
Задание В4........25
Характеристики задания........25
Задание........25
Решение........25
Задание В8........26
Характеристики задания........26
Задание........26
Решение........27

Краткие теоретические сведения

Системы счисления – это способ записи чисел. Системы счисления относятся к системам, созданным человеком, поэтому их называют искусственными.

В любой системе счисления для записи чисел выбирают некоторые символы – **цифры**. Под числом понимают его величину, а не символьную запись. Цифры можно сравнить с буквами алфавита (знаками), а числа – со словами, составленными из этих букв.

Системой счисления называют совокупность символов (цифр) и правил их использования для записи чисел и выполнения операций над числами.

Существуют позиционные и непозиционные системы счисления.

В непозиционных системах счисления каждой цифре соответствует значение, не зависящее от ее места в записи числа. Величина числа определяется правилами.

В **позиционных системах** вклад цифры, в величину числа определяется ее позицией в записи числа. Позиции мы будем называть также **разрядами** числа.

Главная характеристика позиционных систем – **основание системы счисления** *P*. Основание системы счисления определяет

- количество цифр, используемых для записи чисел;
- вес каждого разряда в записи чисел.

Разряды целого числа нумеруются справа налево, начиная с нуля. Вес каждого разряда равен основанию системы счисления, возведенному в степень, соответствующую номеру разряда. Веса разрядов образует **базис** позиционной системы счисления. В десятичной системе счисления базис целого числа образует последовательность $\ldots 10^n, \ldots, 10^4, 10^3, 10^2, 10, 1$. Например, в десятичном числе 567 цифра 5 дает вклад в величину числа равный пяти сотням, цифра 6 – шесть десятков, цифра 7 – семь единиц. Число можно представить в виде $567 = 5 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 1$.

Позиционная система счисления называется **традиционной**, если ее базис образуют члены геометрической прогрессии, а значения цифр есть целые неотрицательные числа

Количество цифр для традиционной системы счисления равно основанию системы, совокупность используемых цифр называют **алфавитом системы счисления**.

Традиционные позиционные системы счисления с основанием *P* называют ***P*-ичными** (далее будем обозначать их СС***p***).

В данном учебно-справочном пособии и заданиях ЕГЭ подразумевается использование традиционных систем счисления.

Запись числа X в P-ичной системе счисления

$$X_P = x_n \dots x_1\, x_0 .\, x_{-1}\, x_{-2} \dots x_{-m}$$

называется **свернутой формой** записи числа (это привычная всем форма записи чисел). Здесь x_n ,…x_1, x_0, x_{-1}, x_{-2} ,…, x_{-m} – цифры в записи числа, n и m — количество целых и дробных разрядов. Основание системы счисления записывается в виде нижнего индекса справа от числа. Для чисел в десятичной системе индекс, как правило, не указывают.

X_P можно представить в виде многочлена:

$$X_P = x_n \cdot P^n + \dots + x_1 P^1 + x_0 P^0 + x_{-1} P^{-1} + x_{-2} P^{-2} + \dots + x_{-m} P^{-m}$$

Такая запись называется **развернутой формой** записи числа.

В любой P-ичной системе счисления натуральные числа, меньшие основания, представляются в виде одной цифры. Само число P записывается в виде 10_P ($P = 1*P + 0$). Число P^2 записывается в виде 100_P ($P = 1*P^2 + 0*P + 0$), P^3 записывается в виде 1000_P и т.д., по аналогии с десятичной системой счисления.

Если для записи целого числа в системе счисления с основанием P используется N разрядов (цифр), то количество различных чисел равно P^N, это числа от 0 до ($P^N – 1$).

Например, если для записи десятичных чисел используется три разряда ($x_2\ x_1\ x_0$), можно записать 1000 разных чисел – от 0 до 999 = $10^3 – 1$.

Для чисел в P-ичной системе счисления каждый левый разряд имеет вес в P раз больший, чем предыдущий. Крайний правый разряд имеет наименьший вес и называется **младшим** разрядом. Крайний левый разряд имеет наибольший вес и называется **старшим** разрядом.

Если запись числа состоит из ($N + M$) разрядов, где N – число разрядов в целой, а M – в дробной части числа, то максимальное и минимальное числа с таким количеством разрядов определяются как:

Максимальное число	**Минимальное число, отличное от нуля**
$\underbrace{(P^N - 1)}_{\text{максимальная целая часть}} + \underbrace{(1 - P^{-M})}_{\text{максимальная дробная часть}}$	$\underbrace{0}_{\text{минимальная целая часть}} + \underbrace{P^{-M}}_{\text{минимальная дробная часть}}$

Максимальное ($N + M$)-разрядное число получается при занесении во всего его разряды наибольшей цифры системы счисления. Минимальное – при занесении во все разряды числа нулей и единицы в младший.

Всего в может быть записано P^{N+M} различных по значению чисел, содержащих ($N + M$) разрядов.

Например, для десятичной системы ($P = 10$) при $N = 3$ и $M = 2$ минимальное число:$10^{-2} = 0.01$, максимальное: $(10^3 – 1) + (1 - 10^{-2}) = (1000-1) + (1 – 0.01) = 999 + 0.99 = 999.99$. Всего различных пятиразрядных десятичных чисел: 10^5.

В информатике в основном рассматриваются системы:

- десятичная ($P = 10$, цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9);
- двоичная ($P = 2$, цифры: 0, 1);
- восьмеричная ($P = 8$, цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7);
- шестнадцатеричная ($P = 16$, цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F).

Двоичная система счисления

Основание двоичной СС равно двум, в ней используются две цифры – 0 и 1. Для моделирования работы электронных устройств компьютеров и других устройств обработки информации применяется именно **двоичная система счисления**. Это связано с надежностью представления цифр 0 и 1 в электронных устройствах компьютера.

Нули могут стоять как в начале, так и в конце записи целой и дробной частей

$$\underbrace{000}_{\text{незначащие нули}}1001011\underbrace{000}_{\text{значащие нули}} \qquad 0,0001101000$$

значащие нули незначащие нули

числа. Говорят о **незначащих** и **значащих нулях**. Незначащие нули при записи чисел, как правило, отбрасываются.

Запишем несколько десятичных чисел в двоичной системе счисления:

P=10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P=2	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

Этот ряд чисел получен добавлением единицы к очередному числу, например

$$\begin{array}{r} + \quad 11 \\ 1 \\ \hline 100 \end{array}$$

Рассуждаем так: для $СС_2$ по таблице сложения $1 + 1 = 10_2$; в младшем разряде (самом правом) ноль пишем, один – в уме. Для следующего разряда – один плюс один в уме тоже равно 10_2, ноль пишем, один – в уме. Таким образом, слева добавляется еще один разряд в записи числа, в нем будет записана единица.

Восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления

Даже двузначные десятичные числа, представленные в двоичном виде, имеют семь разрядов ($99_{10} = 1100011_2$). Двоичная запись чисел неудобна для восприятия и является очень громоздкой. Поэтому в книгах и программных средах представление двоичных чисел заменяют их представлением в восьмеричной или шестнадцатеричной системе счисления.

В восьмеричной системе счисления используются восемь цифр (0, 1, …, 7) для записи чисел.

Например, восьмеричными числами являются: 777_8, 13_8, 265_8 и проч.

Восьмеричными не могут быть числа: 931, 808 и проч., содержащие цифры большие семи.

В шестнадцатеричной системе счисления используют 16 цифр (напомним, что количество цифр в позиционной системе счисления равно ее основанию). В позиционных системах счисления количественное значение цифры зависит от разряда, в котором она находится, поэтому все цифры должны занимать один разряд. Поскольку десятью цифрами десятичной системы обозначить все цифры шестнадцатеричной системы невозможно, то оставшиеся шесть цифр обозначаются латинскими буквами: **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**, которые соответствуют десятичным значениям 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Например, шестнадцатеричные числа, могут быть такими: AF_{16}, $FFFF_{16}$, $F1_{16}$, $105D_{16}$ и т.д.

Заметим, что легко можно сравнивать числа, записанные в разных системах счисления с использованием одних и тех же цифр, например, 1111_2 и 1111_8. Верно, что $1111_8 > 1111_2$, поскольку «вес» каждого разряда у числа, записанного в $СС_8$ больше, чем у числа, записанного в $СС_2$. Подумайте и решите самостоятельно, какое из двух чисел больше: 555_{16} или 555_8.

Перевод числа из одной позиционной системы счисления в другую

Существует два основных правила перевода чисел из одной позиционной системы счисления в другую. Основное различие этих правил заключается в том, в какой системе счисления проводятся вычисления – в «старой» или в «новой».

На практике чаще всего одна из систем счисления десятичная, Так как нам привычно и удобно проводить вычисления в десятичной системе счисления, то

– при переводе записи числа в $СС_р$ в $СС_{10}$ целесообразно применять правило, по которому вычисления проводятся в «новой», десятичной системе счисления;

– при переводе записи числа в $СС_{10}$ в $СС_р$ целесообразно применять правило, по которому вычисления проводятся в «старой», десятичной системе счисления.

Перевод числа из *P*-ичной системы счисления в десятичную систему счисления

Для перевода числа $x_n\ x_{n-1}\ \ldots\ x_1\ x_0\ .\ x_{-1}\ x_{-2}\ \ldots\ x_{-m}$, записанного в $СС_P$, в десятичную систему счисления применяют формулу разложения числа по степеням основания системы счисления *P*

$$x_n \cdot P^{\,n} + \ldots + x_1 P^{\,1} + x_0 P^{\,0} + x_{-1} P^{-1} + x_{-2} P^{-2} + \ldots + x_{-m} P^{-m}$$

Вычисления по этой формуле проводятся в «новой» (десятичной) системе счисления. Это значит, что цифры «старой» *P*-ичной системы счисления и ее основание переводят в десятичную систему счисления, после чего проводят вычисления по формуле.

Примеры:

$100010_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 32 + 2 = 34_{10}$

$110{,}01_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 4 + 1 + 0{,}25 = 5{,}25_{10}$

$1{,}0111_2 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} = 1 + 0{,}25 + 0{,}125 + 0{,}0625 = 1{,}4375_{10}$

$726_8 = 7 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 7 \cdot 64 + 2 \cdot 8 + 6 \cdot 1 = 470_{10}$

$FF1_{16} = 15 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 = 15 \cdot 256 + 15 \cdot 16 + 1 \cdot 1 = 4181_{10}$

Важно не забывать, что позиции целой части числа нумеруются начиная с нуля справа налево от десятичной точки. Позиции дробной части числа нумеруются слева направо от десятичной точки, начиная с единицы.

Для того чтобы быстро и без ошибок переводить двоичные числа в десятичные, полезно запомнить базис $СС_2$ (веса разрядов), хотя бы до десятой степени двойки:

2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

И для отрицательных степеней:

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625

Так как в двоичной СС используются только две цифры в записи числа, то для перевода числа из двоичной СС в десятичную СС можно использовать другой способ: в десятичной системе счисления сложить веса разрядов (степени двойки), в которых находятся единицы в записи исходного двоичного числа: для целой части числа эти веса будут целыми, для дробной – дробными.

Перевод числа из десятичной системы счисления в *P*-ичную систему счисления

Перевод целых чисел

<u>Способ 1</u>

Для преобразования целого числа **из СС$_{10}$ в СС*p*** используется следующий алгоритм: последовательно делят с остатком исходное число на основание «новой» системы счисления *P* до получения нулевого результата. Вычисления проводятся в исходной, или «старой» (десятичной) СС. Алгоритм:

1) десятичное число *a* делим на *P*, записываем в качестве нового значения десятичного числа *a* целую часть частного;
2) остаток от деления заменяем на соответствующую цифру в новой *P*-ичной СС и приписываем ее слева к полученным ранее цифрам *P*-ичного числа;
3) выполняем пункты 1 и 2, пока *a* не станет равным нулю.

При переводе десятичных чисел в шестнадцатеричную запись при помощи последовательных делений остатки от 10 до 15 заменяются соответствующими буквами от A до F.

<u>Способ 2</u>

Второй способ основан на выделении максимальной степени числа *P* в десятичном числе, его еще называют последовательным разложением числа по степеням *P* (весам разрядов). Этот способ удобно применять, когда нам хорошо известны все степени числа *P* не большие заданного числа *a*. Рассмотрим его на примере *P* = 2.

Тогда значение двоичного числа можно представить в виде суммы степеней двойки тех разрядов, в которых записана единица. Проще говоря, если степень двойки вошла в разложение десятичного числа, то в разряде двоичного числа с номером, равным степени двойки, ставится единица. Если степень двойки в разложение не вошла, на ее месте ставят ноль, как показано на рис. 3.2.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} & & 2^4 & & 2^3 & & 2^2 & & 2^1 & & 2^0 & & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \mathbf{23} & = & \mathbf{16} & + & \mathbf{0} & + & \mathbf{4} & + & \mathbf{2} & + & \mathbf{1} & = & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{array}$$

Рис. 3.2

Для исходного десятичного числа a надо найти такое n, при котором $2^n \le a < 2^{n+1}$. Тогда двоичная запись исходного числа a будет состоять из n+1 цифр, а в позиции n двоичного числа записывается единица.

Далее определим остаток ($a - 2^n$), обозначим его также a. Если остаток равен нулю, то вычисления прекращаются, цифры оставшихся младших разрядов равны нулю. Если остаток не равен нулю, опять определим для него максимальную степень числа 2, не превышающую a, определим очередной остаток и т.д.

Перевод конечной десятичной дроби в двоичную систему счисления

При переводе дробной части числа из CC_{10} в CC_2 пользуются умножением дробной части на основание новой системы счисления.

Дробную часть исходного десятичного числа, а затем дробные части полученных произведений, последовательно умножают на 2 – основание новой системы счисления. Целые части произведений образуют цифры записи числа в CC_2. Действия выполняют в старой CC_{10}, по следующему алгоритму:

1) Умножаем дробную часть числа на два. Целая часть числа, получившегося в результате умножения, есть первая цифра после десятичной точки;
2) Дробную часть полученного произведения умножаем на 2. Целая часть произведения – следующая цифра двоичного числа, ее приписываем к результату справа;
3) Если дробная часть равна нулю или в двоичной записи выделен период, прекращаем умножение.
4) Если дробная часть не равна нулю или не выделен период, выполняем шаги 2 и 3;

Полученные целые части произведений представляют собой цифры дробной части двоичного числа.

Если при последовательных умножениях дробная часть не обращается в нуль, говорят о периодических двоичных дробях. В случае периодических дробей умножение выполняется до тех пор, пока не обнаружен период.

Смешанное число переводится в двоичную систему счисления по частям: целая часть методом деления на 2, дробная часть – методом умножения на 2.

Перевод чисел в системах счисления с основаниями степеней двойки

Основания двоичной и восьмеричной, двоичной и шестнадцатеричной систем счисления связаны степенной зависимостью: $8 = 2^3$, $16 = 2^4$. Это дает возможность легко переходить от записи числа в $СС_2$ к записям в $СС_8$ и $СС_{16}$ и наоборот.

Для представления двоичных чисел в восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления воспользуемся следующей **теоремой**.

Для того чтобы перевести целое число из системы счисления с основанием P в систему счисления с основанием $Q = P^m$, где m – натуральное число, достаточно запись числа в P-ичной системе разбить на группы по m цифр справа налево, и каждую такую цифру заменить одной цифрой в Q-ичной системе счисления.

Если $P = 2$, а $Q = 8$, то согласно теореме, для записи одной цифры восьмеричной системы счисления в двоичной системе необходимо $m = log_2 8 = 3$ двоичных разрядов. Для записи одной цифры шестнадцатеричной системы счисления ($Q = 16$) необходимо $m = log_2 8 = 4$ двоичных разряда.

Каждая цифра восьмеричной системы счисления представляется числом из трех разрядов (**триадой**) в двоичной системе, как показано в таблице.

Основание системы счисления	
2	**8**
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Чтобы перевести число из $СС_8$ в $СС_2$, достаточно каждую цифру восьмеричного числа заменить двоичным числом из трех разрядов.

Для перевода целого числа из $СС_2$ в $СС_8$ необходимо разбить двоичное число на триады справа налево и заменить их на соответствующие восьмеричные цифры. При необходимости недостающие незначащие нули дописываются к двоичному числу слева.

Каждая цифра шестнадцатеричной системы счисления представляется числом из четырех разрядов (**тетрадой**) в двоичной системе, как показано в таблице.

Основание системы счисления	
2	**16**
0000	0
0001	1
0010	2

0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Для перевода целого числа из $СС_{16}$ в $СС_2$, достаточно каждую цифру шестнадцатеричного числа заменить двоичным числом из четырех разрядов.

Для перевода целого числа из $СС_2$ в $СС_{16}$ необходимо разбить двоичное число на тетрады справа налево и заменить их на соответствующие шестнадцатеричные цифры. Недостающие незначащие нули при необходимости дописываются слева к двоичному числу.

Например, приведем запись двоичного числа в восьмеричной и шестнадцатеричной системах:

$СС_2$	**$СС_8$**	**$СС_{16}$**
101110_2	$56_8 = 101\ 110_2$	$2E_{16} = 0010\ 1110_2$
110100000_2	$640_8 = 110\ 100\ 000_2$	$1A0_{16} = 0001\ 1010\ 0000_2$

Номер разряда $СС_2$	3	2	1	0
Вес разряда в $СС_2$	8	4	2	1
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3 = 2 + 1	0	0	1	1
…	…	…	…	…
12 = 8 + 4	1	1	0	0
13 = 8 + 4 + 1	1	1	0	1
14 = 8 + 4 + 2	1	1	1	0
15 = 8 + 4 + 2+ 1	1	1	1	1

Таблицы соответствий цифр $СС_8$ и $СС_{16}$ с их представлением триадами и тетрадами в $СС_2$ можно не запоминать. Используйте метод последовательного разложения по степеням двойки десятичных чисел от 0 до 15 в двоичную систему счисления, например, 14 = 8 + 4 + 2. Если степень двойки вошла в разложение, в соответствующий разряд запишем 1, если нет – 0.

Для получения двоичной триады, эквивалентной восьмеричной цифре, можно использовать правило **“421”**, в основе которого лежит представление числа в виде суммы степеней двойки. В триаде необходимо записать единицы на местах тех цифр (4, 2, 1), сумма которых дает значение восьмеричной цифры. На местах остальных цифр записать ноль.

Примеры: $7_8 = 4 + 2 + 1 = 111_2$

$3_8 = 2 + 1 = 011_2$

$6_8 = 4 + 2 = 110_2$

$5_8 = 4 + 1 = 101_2$

Для получения двоичной тетрады, эквивалентной шестнадцатеричной цифре, можно использовать правило **“8421”.** В тетраде необходимо записать единицы на местах цифр, сумма которых дает значение шестнадцатеричной цифры. На местах остальных цифр записать ноль

Примеры**:** $F_{16} = 15_{10} = 8 + 4 + 2 + 1 = 1111_2$

$C_{16} = 12_{10} = 8 + 4 = 1100_2$

$D_{16} = 13_{10} = 8 + 4 + 1 = 1101_2$

$9_{16} = 9_{10} = 8 + 1 = 1001_2$

Замечание: Перевод десятичных чисел в CC_2 требует выполнения большого количества операций деления. Разумно сначала перевести десятичное число в шестнадцатеричную систему счисления, тем самым сократив количество делений. А затем воспользоваться связью между двоичной и шестнадцатеричной системами. Например, $3556_{10} = DE4_{16} = 1101\ 1110\ 0100_2$.

Двоичная арифметика

Правила выполнения арифметических действий для всех позиционных СС одинаковы и совпадают с правилами в CC_{10}. В их основе лежат таблицы сложения и умножения.

Для двоичных чисел действуют следующие **таблицы сложения и умножения**:

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	10

Таблица сложения в двоичной СС

x	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

Таблица умножения в двоичной СС

Проще всего складывать двоичные числа столбиком, применяя таблицу сложения. Проверка осуществляется путем перевода слагаемых и суммы в десятичную систему счисления.

Вычитание также выполняется столбиком с использованием таблицы сложения. Если цифра a_i уменьшаемого A меньше цифры b_i вычитаемого B, занимаем единицу из левого разряда и выполняем действие $10_2 + a_i - b_i$. Здесь i – номер разряда в записи двоичного числа.

В десятичной системе счисления при умножении числа на 10^m, происходит сдвиг десятичной точки вправо на m разрядов. Например,

$1{,}25 \cdot 100 = 125$

$13 \cdot 10 = 130$

$0{,}005 \cdot 10 = 0{,}05$.

При умножении двоичного числа на 2^m, двоичная точка сдвигается **вправо** на m разрядов.

Примеры решения заданий

Пример 1. Задание с кратким ответом

В системе счисления с основанием *x* десятичное число 208 записывается в виде: 385. Укажите это основание.

Решение:

Применив формулу разложения числа по основанию системы счисления, получим следующее уравнение:

$$3 \cdot x^2 + 8 \cdot x^1 + 5 \cdot x^0 = 208$$

Решим квадратное уравнение

$$3 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 203 = 0$$

Корнями уравнения являются числа: 7 и (-28/3). Считаем, что основание системы счисления должно быть целым и положительным. Тогда ответ $x = 7$.

Проверим ответ: подставим его в исходное уравнение. $3 \cdot 49+8 \cdot 7+5 = 208$

Ответ: 7

Пример 2. Задание с кратким ответом

Перевести число 83_{10} в двоичную систему счисления. В ответе запишите только число без указания основания системы счисления.

Решение:

Выражение	Частное	Остаток
83 : 2	41	1
41 : 2	20	1
20 : 2	10	0
10 : 2	5	0
5 : 2	2	1
2 : 2	1	0
1 : 2	0	1

Разряды в записи числа

Рис. 3.1. Пример перевода числа в двоичную систему счисления

Выпишем остатки целочисленного деления в порядке, показанном на рисунке 3.1. Получим 1010011

Часто для перевода числа из десятичной СС в систему счисления с другим основанием деление записывают уголком. Для этого примера:

```
_83 |2
 82  _41 |2
 1    40  _20 |2
      1    20  _10 |2
```

0 10 _5 | 2
0 4 _2 | 2
1 2 _1 | 2
0 0 0
1

Остатки от деления выписываем снизу вверх (от последнего остатка к первому). Обратите внимание, что в заданиях с кратким ответом обычно не требуется указывать в ответе основание системы счисления.

Ответ: 1010011

Пример 3. Задание с кратким ответом

Перевести в восьмеричную систему счисления число 127_{10}.

Решение:

Выражение	Частное	Остаток
127 : 8	15	7
15 : 8	1	7
1 : 8	0	1

Запишем остатки от деления в обратном порядке: 177_8

Ответ: 177

Пример 4. Задание с кратким ответом

Перевести число $\mathbf{3556_{10}}$ из десятичной системы в шестнадцатеричную систему счисления

Решение:

Выражение	Частное	Остаток
3556 : 16	222	4
222 : 16	13	14(E)
13 : 16	0	13(D)

Выпишем остатки от деления в обратном порядке. Не забудьте, что каждая цифра должна занимать ровно одну позицию в записи числа. Самая распространенная ошибка при решении подобных задач – запись не шестнадцатеричной цифры, а ее десятичного значения, для этого примера запись 13144 неверна. Верной является запись $DE4_{16}$

Ответ: DE4

Пример 5. Задание с кратким ответом

Перевести число 74_{10} в двоичную систему счисления.

Решение:

1) Определим ближайшую меньшую степень двойки, она равна 2^6 ($2^6=64 < 74 < 128=2^7$). Значит, в шестом разряде надо записать единицу, а всего разрядов в записи числа семь.
2) Остается число $74 - 2^6 = 10$. Ближайшая меньшая степень двойки – это 2^3 ($8 < 10 < 16$), в третий разряд запишем единицу.
3) Остается $10 - 2^3 = 2$, значит, в первый разряд ($2^1 \le 2 < 4$) тоже запишем единицу, в остальные разряды – нули.

$$74_{10} = 64_{10} + 8_{10} + 2_{10} = 2^6 + 2^3 + 2^1$$

Таким образом, степени двойки, которые вошли в последовательные вычитания, дают единицы в соответствующих разрядах двоичного числа, в остальных разрядах – нули. Получим 1001010_2

Ответ: 1001010

Еще примеры:

$128_{10} = 2^7$, $128_{10} = 10000000_2$

$35_{10} = 2^5 + 2^1 + 2^0$, $35_{10} = 100011_2$

Пример 6. Задание с кратким ответом

Переведите число $0{,}375_{10}$ в двоичную систему счисления. В ответе запишите только число без указания основания системы счисления.

Решение:

Выражение	Произведение	Целая часть
0,375 · 2	0,75	0
0,75 · 2	1,5	1
0,5 · 2	1,0	1

Разряды в записи дробной

Полученные цифры записываются слева направо после запятой: 0,011.

Ответ: 0,011

Пример 7. Задание с кратким ответом

Переведите число 0,37 в двоичную систему счисления. В ответе запишите только число без указания основания системы счисления.

Решение:

Целая часть числа равна нулю. Займемся переводом дробной части в двоичную систему счисления:

Выражение	Произведение	Целая часть
0,37 · 2	0,74	0
0,74 · 2	1,48	1
0,48 · 2	0,96	0

0,96 · 2	1,92	1
0,92 · 2	1,84	1
0,84 · 2	1,68	1
0,68 · 2	1,36	1
0,36 · 2	0,72	0
0,72 · 2	1,44	1
0,44 · 2	0,88	0
0,88 · 2	1,76	1
0,76 · 2	1,52	1
0,52 · 2	1,04	1
0,04 · 2	0,08	0
0,08 · 2	0,16	0
0,16 · 2	0,32	0
0,32 · 2	0,64	0
0,64 · 2	1,28	1
0,28 · 2	0,56	0
0,56 · 2	1,12	1
0,12 · 2	0,24	0
0,24 · 2	0,48	0
Начало периодического повторения		
0,48 · 2	0,96	0
…		

Получим: $0{,}01(01111010111000010100)_2$.

Ответ: 0,01(01111010111000010100)

Пример 8. Задание с кратким ответом

Переведите число 2,7 в двоичную систему счисления. В ответе запишите только число без указания основания системы счисления.

Решение:

Переводим целую часть: $2_2 = 10$. Переводим дробную часть:

Выражение	**Произведение**	**Целая часть**
0,7 · 2	1,4	1
0,4 · 2	0,8	0
0,8 · 2	1,6	1
0,6 · 2	1,2	1
0,2 · 2	0,4	0
Начало периодического повторения		
0,4 · 2	0,8	0
…		

Объединив целую и дробную части, получим: $10{,}1(0110)_2$

Ответ: 10,1(0110)

Пример 9. Задание с кратким ответом

Перевести число 701_8 в двоичную систему счисления.

Решение:

Цифра 7 восьмеричной системы счисления представляется в двоичной как 111_2, цифра 0 как 000_2, цифра 1 как 001_2. Получим $111\ 000\ 001_2$.

Не забывайте, что надо обязательно использовать ровно три двоичных разряда для представления одной восьмеричной цифры! Если не придерживаться этого правила, можно получить неверную запись числа (11101).

Ответ: 111000001

Пример 10. Задание с кратким ответом

Представить двоичное число 10011110011001_2 в восьмеричной системе счисления.

Решение:

Разобьем двоичную запись числа на триады справа налево. При необходимости слева допишем незначащие нули. Получим запись восьмеричного числа 23631_8

$$\underbrace{010}_{2}\underbrace{011}_{3}\underbrace{110}_{6}\underbrace{011}_{3}\underbrace{001}_{1}{}_2$$

Самая распространенная ошибка при решении подобных задач – разбиение числа на триады слева направо.

***Ответ*:** 23631

Пример 11. Задание с кратким ответом

Представить шестнадцатеричное число $\mathbf{F0_{16}}$ в двоичном виде.

Решение:

Цифра F_{16} представляется как 1111_2, а цифра 0_{16}, как 0000_2. Получим $F0_{16} = 1111\ 0000_2$.

***Ответ*:** 11110000

Пример 12. Задание с кратким ответом

Представить двоичное число 10111110011001_2 в шестнадцатеричной системе счисления.

Решение:

Разобьем двоичную запись числа на тетрады справа налево. При необходимости слева допишем незначащие нули.

$$\underbrace{0010}_{2}\underbrace{1111}_{F}\underbrace{1001}_{9}\underbrace{1001}_{9}{}_2$$

Получим запись шестнадцатеричного числа $2F99_{16}$

***Ответ*:** 2F99

Пример 13. Задание с выбором одного ответа

Сколько значащих нулей содержится в двоичной записи шестнадцатеричного числа $22{,}22_{16}$?

1) 12 2) 11 3) 10 4) 9

Решение:

Запишем каждую цифру заданного числа двоичными тетрадами. Получим:

$00100010{,}00100010_2 = 100010{,}0010001_2$.

Незначащими являются левые нули целой части и правые нули дробной части.

Ответ: № 4

Пример 14. Задание с выбором одного ответа

Для передачи по каналу связи сообщения, состоящего только из символов А, Б, В, Г, Д используется неравномерный код: А-00, Б-111, В-010, Г-011, Д-110. Через канал связи передается сообщение ДГАБВГД. Закодируйте сообщение данным кодом. Полученную двоичную последовательность переведите в шестнадцатеричную систему счисления. Какой вид будет иметь сообщение?

1) 121214914 2) E9ECC 3) 149141212 4) CCE9E

Решение:

Запишем закодированное сообщение, подставляя вместо символов их коды:

11001100111010011110.

Разобъем полученную двоичную последовательность на тетрады справа налево, получим

1100 1100 1110 1001 1110

Заменим каждую тетраду шестнадцатеричной цифрой: CCE9E

Ответ: № 4

Пример 15. Задание с кратким ответом

Найти сумму чисел 1010011_2 и 11111_2. В ответе запишите только число без указания системы счисления.

Решение:

Выполним сложение двоичных чисел в столбик, а затем проверку в десятичной системе счисления.

Отметим, что в двоичной системе счисления 1 + 1 + 1 = 11, это значит, что в соответствующий разряд суммы записывается 1, и 1 переносится в старший разряд.

	Двоичные числа	проверка в десятичной СС
+	1010011	83
	11111	31
	1110010	114

Ответ: 1110010

Пример 16. Задание с кратким ответом

Найти разность чисел 11101_2 и 1011_2. В ответе запишите только число без указания системы счисления.

Решение:

Выполним вычитание двоичных чисел в столбик, а затем проверку в десятичной системе счисления.

Отметим, что в двоичной системе счисления $10_2 - 1_2 = 1_2$.

Выполним действия по шагам. В младшем разряде 1 – 1 = 0

$$
\begin{array}{r}
_{-}\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{ccccc} & & & & 0 \end{array}
\end{array}
$$

В разряде десятков получаем 0 – 1. Требуется заем из старшего разряда, старший разряд уменьшаем на единицу 1 – 1 = 0, в разряде десятков производим вычитание 10 – 1 = 1.

$$
\begin{array}{r}
_{-}\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{ccccc} & & & 1 & 0 \end{array}
\end{array}
$$

Действия в оставшихся разрядах: 0 – 0 = 0; 1 – 1 = 0; 1 – 0 = 1.

$$
\begin{array}{r}
_{-}\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}
\end{array}
$$

Более коротко вычитание столбиком записывается так:

Двоичные числа	Проверка в десятичной СС
$\begin{array}{r} _{-}\begin{array}{r} 11101 \\ 1011 \end{array} \\ \hline 10010 \end{array}$	$\begin{array}{r} _{-}\begin{array}{r} 29 \\ 11 \end{array} \\ \hline 18 \end{array}$

Ответ: 10010

Пример 17. Задание с кратким ответом

Найти произведение чисел 10011_2 и 101_2 . В ответе запишите только число без указания системы счисления.

Решение:

Двоичные числа умножаются столбиком так же, как десятичные числа. При записи сомножителей «в столбик» необходимо, как и для десятичных чисел, выровнять их так, чтобы крайние правые ненулевые цифры оказались друг под другом. Частичные произведения получают умножением первого сомножителя на каждый разряд второго сомножителя, начиная с младшего. Полученные произведения суммируются.

В двоичной СС частичные произведения либо равны нулю (при умножении на 0), либо равны первому сомножителю (при умножении на 1).

Двоичные числа

			x	1	0	0	1	1
						1	0	1
			1	0	0	1	1
+		0	0	0	0	0	
	1	0	0	1	1		
	1	0	1	1	1	1	1

Десятичная проверка

x	1	9
		5
	9	5

Ответ: 1011111

Пример 18. Задание с кратким ответом

Найти произведение чисел 1001100_2 и 11010_2 . В ответе запишите только число без указания системы счисления.

Решение: Выполним умножение столбиком и проверим результат

Двоичные числа

		x	1	0	0	1	1	0	0	
				1	1	0	1	0		
			1	0	0	1	1			
+	1	0	0	1	1					
1	0	0	1	1						
1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0

Десятичная проверка

x			7	6
			2	6
	+	4	5	6
	1	5	2	
	1	9	7	6

Ответ: 11110111000

Пример 19. Задание с кратким ответом

Найти произведение чисел 1011_2 и 100_2. В ответе запишите только число без указания системы счисления.

Решение:

Заметим, что число $100_2 = 2^2{}_{10}$. Умножение любого двоичного числа на число 100_2 равносильно сдвигу двоичной точки вправо на два разряда.

$1011_2 \cdot 100_2 = 101100_2$

Ответ: 101100

Пример 20. Задание с кратким ответом

Найти частное чисел 1010_2 и 10_2 . В ответе запишите только число без указания системы счисления.

Решение: Выполним деление столбиком и проверим результат

$$
\begin{array}{cccccc|ccc}
 & 1 & 0 & 1 & 0 & & 1 & 0 & \\ \cline{7-9}
- & 1 & 0 & & & & 1 & 0 & 1 \\ \cline{2-3}
 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\
 & & & 1 & 0 & & & & \\ \cline{4-5}
 & & & 0 & 0 & & & &
\end{array}
$$

Выполним проверку в десятичной системе счисления: $1010_2 = 10_{10}$, $10_2 = 2_{10}$, $101_2 = 5_{10}$, $10 : 2 = 5$.

Ответ: 101

При делении двоичного числа на 2^m, двоичная точка сдвигается **влево** на m разрядов.

В рассмотренном выше примере мы делили число 1010_2 на $10_2 = 2_{10}$. Десятичная точка переместилась на позицию влево.

Пример 21. Задание с кратким ответом

Найти частное чисел 1010_2 и 100_2 . В ответе запишите только число без указания системы счисления.

Решение:

Заметим, что число $100_2 = {2^2}_{10}$. Деление любого двоичного числа на 100_2 равносильно сдвигу двоичной точки на две позиции влево. Следовательно,

$1010_2 : 100_2 = 10{,}1_2$

Выполним проверку в десятичной системе счисления: $1010_2 = 10_{10}$, $100_2 = 4_{10}$, $10{,}1_2 = 2{,}5_{10}$, $10 : 4 = 2{,}5$.

Ответ: 10,1

Пример 22. Задание с выбором одного ответа

Вычислите сумму чисел X и Y, если $X = 110111_2$, $Y = 135_8$. Результат представьте в двоичном виде:

1) 11010100_2 2) 10100100_2 3) 10010011_2 4) 10010100_2

***Решение*:**

Варианты ответа представлены в двоичной системе, поэтому нам удобнее будет перевести второе число в двоичную систему и сложить числа в ней.

$Y = 135_8 = 001\ 011\ 101_2 = 1\ 011\ 101_2$

Выполним сложение в столбик с использованием таблицы сложения $СС_2$:

$$
\begin{array}{r}
+\ \ 110111 \\
1011101 \\
\hline
10010100
\end{array}
$$

Напомним, что в двоичной системе счисления

$1_2 + 1_2 = 10_2$;

$1_2 + 1_2 + 1_2 = 11_2$

Полученный ответ сравниваем с вариантами ответов.

Ответ: № 4.

Замечание: При решении подобных задач следует все числа записать в одной системе счисления. Это может быть $СС_2$, $СС_8$, $СС_{10}$. При выборе системы счисления следует учитывать количество преобразований чисел. Например, при выборе $СС_2$ потребовалось одно преобразование. При выборе $СС_8$ – пять двоичных чисел (X и ответы) необходимо перевести в восьмеричную запись. При выборе $СС_{10}$ – требуется перевести шесть чисел.

Пример 23. Задание с выбором одного ответа

Вычислите сумму чисел X и Y, если $X = 110_{16}$, $Y = 567_8$. Результат представьте в двоичной системе счисления:

1) 1010000000_2 2) 1010000111_2 3) 110000111_2 4) 1010001000_2

Решение

Переведем оба числа в $СС_2$, представляя каждую цифру первого числа тетрадами, второго числа – триадами.

$X = 110_{16} = 0001\ 0001\ 0000_2 = 100010000_2$

$Y = 567_8 = 101\ 110\ 111_2$

Выполним сложение в столбик

$$
\begin{array}{r}
+\ \ 100010000_2 \\
101110111_2 \\
\hline
1010000111_2
\end{array}
$$

Ответ: № 2.

Решения заданий демоварианта 2012

Задание А1

Характеристики задания

Проверяемые элементы содержания	Знания о системах счисления и двоичном представлении информации в памяти компьютера
Контролируемый элемент содержания (по кодификатору)	1.4.1. Позиционные системы счисления
Требования к уровню подготовки (по кодификатору)	1.1.3. Строить модели объектов, систем и процессов. Записывать алгоритмы вна естественном языке и в виде блок-схем[1]
Вид деятельности	Воспроизведение представлений или знаний (при выполнении практических заданий)
Уровень	базовый
Максимальный первичный балл	1
Время выполнения	1 мин.

Задание

A1 Сколько единиц в двоичной записи числа 1025?

1) 1 2) 2 3) 10 4) 11

Решение

Переведем число 1025 в двоичную систему счисления. Для того чтобы сделать это быстро, выделим максимальные степени двойки из числа, затем из оставшейся части числа и т.д.

1025 – 1024 = 1.

Следовательно, $1025 = 1024 + 1 = 2^{10} + 2^{0}$.

Десятый и нулевой разряды записи двоичного числа заполним единицами, остальные нулями, получим: $1025_{10} = 10000000001_2$. (Нумерация разрядов в записи целого числа начинается с нуля и увеличивается справа налево). Количество единиц равно двум.

Заметим, что не обязательно записывать число в двоичной системе счисления, чтобы определить количество единиц. Выделив степени двойки, можно определить количество разрядов и единиц в двоичной записи числа. Так, в данном примере общее количество разрядов двоичной записи числа равно 11 ($1024 = 2^{10} < 1025 < 2^{11}$), количество единиц равно 2. Количество значащих нулей равно 11 – 2 = 9.

Ответ: 2

[1] Так в спецификации и кодификаторе ЕГЭ-2012

Задание B4

Характеристики задания

Проверяемые элементы содержания	Знания о методах измерения количества информации[2]
Контролируемый элемент содержания (по кодификатору)	1.1.3. Дискретное (цифровое) представление текстовой, графической, цифровой информации и видеоинформации. Сигнал, кодирование и декодирование
Требования к уровню подготовки (по кодификатору)	1.1.3. Строить модели объектов, систем и процессов. Записывать алгоритмы вна естественном языке и в виде блок-схем[3]
Вид деятельности	Воспроизведение представлений или знаний (при выполнении практических заданий)
Уровень	базовый
Максимальный первичный балл	1
Время выполнения	2 мин.

Задание

B4 Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. ААААА
2. ААААО
3. ААААУ
4. АААОА

……

Запишите слово, которое стоит на 240-м месте от начала списка.

Ответ: ___________________________.

Решение

Для записи слов используются три символа. Если заменить эти символы цифрами 0, 1 и 2 соответственно (А=0, О=1, У=2), получим запись последовательности неотрицательных целых чисел в троичной системе счисления:

1. $00000_3 = 0_{10}$
2. $00001_3 = 1_{10}$
3. $00002_3 = 2_{10}$
4. $00010_3 = 3_{10}$

---

[2] Так в спецификации ЕГЭ 2012

[3] Так в спецификации и кодификаторе ЕГЭ-2012

На 240-м месте находится число 239_{10}., так как последовательность чисел начинаются с нуля. Переведем его в троичную систему счисления (делением на 3 – основание системы счисления):

Делимое	Целая часть частного	Остаток от деления
239	79	2
79	26	1
26	8	2
8	2	2
2	0 останов	2

Результат – запись остатков от деления – равен 22212, что соответствует записи слова с использованием заданных букв УУУОУ

Ответ: УУУОУ

Задание В8

Характеристики задания

Проверяемые элементы содержания	Знание позиционных систем счисления
Контролируемый элемент содержания (по кодификатору)	1.4.1. Позиционные системы счисления
Требования к уровню подготовки (по кодификатору)	1.1.3. Строить модели объектов, систем и процессов. Записывать алгоритмы вна естественном языке и в виде блок-схем[4]
Вид деятельности	Применение знаний и умений в новой ситуации
Уровень	повышенный
Максимальный первичный балл	1
Время выполнения	2 мин.

Задание

B8 Запись числа 67_{10} в системе счисления с основанием N оканчивается на 1 и содержит 4 цифры. Чему равно основание этой системы счисления N?

Ответ: ___________

[4] Так в спецификации и кодификаторе ЕГЭ-2012

Решение

Запишем число в N-ичной системе счисления $XYZ1_N$, где X, Y, Z – цифры, которые могут принимать значения от 0 до N–1.

Развернутая запись числа имеет вид:

$$X \cdot N^3 + Y \cdot N^2 + Z \cdot N + 1 = 67$$

Вынесем сомножитель N за скобки и разложим (67-1)=66 на простые множители:

$$N \cdot (X \cdot N^2 + Y \cdot N + Z) = 2 \cdot 3 \cdot 11.$$

N – целое число. Из последнего равенства видно, что N является сомножителем в разложении числа 66 на простые множители. Таким образом, N может быть равно 2, 3, 6 (2*3), 11, 22 (2*11), ….

Сразу исключим из рассмотрения значения больше 10, т.к. запись числа в системе счисления с основанием больше 10 должна выглядеть меньше 66.

Далее задачу можно решать двумя способами.

1) Последовательно перевести 66 в двоичную, троичную, шестеричную системы счисления, пока не будет получена четырехзначная запись, оканчивающаяся на ноль (или переводить число 67, пока не получим четырехзначное число, оканчивающееся на 1)
2) Составить неравенство $(XYZ0_N)_{min} \le 66 \le (XYZ0_N)_{max}$. Напомним, что если в системе счисления с основанием N используются K цифр для записи числа, то
   - минимальное K-значное число равно N^{K-1}. В его записи старшая цифра – единица, остальные цифры – нули, например, 1000_N.
   - максимальное K-значное число равно $N^K - 1$ и состоит из K старших цифр системы счисления, например, 9999_{10}, 1111_2, 5555_6. Значение старшей цифры равно (N – 1).

Запись минимального четырехзначного числа в любой системе счисления имеет вид 1000, для данной задачи его значение равно N^3

Для определения максимального значения четырехзначного числа $XYZ0_N$ из максимально возможного четырехзначного числа ($N^4 - 1$) вычтем максимально возможную последнюю цифру (N – 1), т.к. младший разряд в записи числа 66 равен 0.

$$(N^4 - 1) - (N - 1) = N^4 - N$$

Таким образом, можно записать неравенство

$$N^3 \le 66 \le N^4 - N$$

Проверим выполнение неравенства для возможных значений N (2, 3, 6)

N	**$N^3 \le 66$**	**$66 \le N^4 - N$**
2	$8 \le 66$ да	$66 \le 16 - 2$ нет

3	$27 \le 66$ да	$66 \le 81 - 3$ да
6	$216 \le 66$ нет	–

Неравенства выполняются для N = 3, запись числа 67 в троичной системе счисления имеет вид 2111_3

Ответ: 3